

**МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
АЗЕРБАЙДЖАНСКИЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

ВАЛЕХ ЛАТИФ оглы ШАРИФОВ

**УСТОЙЧИВОСТЬ И СОБСТВЕННОЕ КОЛЕБАНИЕ
АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН
С УЧЕТОМ ВНЕШНЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ**

Специальность: 3305.02 - Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по технике**

Баку - 2018

Работа выполнена
в Азербайджанском Архитектурно-Строительном Университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Гаджиев Вагиф Джамал оглы**

Официальные оппоненты: доктор наук по математике,
доцент **Искендеров Рамиз Азиз оглы**

доктор философии по технике,
доцент **Ширалиев Вагиф Алибала оглы**

Ведущая организация: Азербайджанский Строительно-
Архитектурный Научно - Исследовательский
Институт

Защита состоится 25 мая 2018 г. в 12⁰⁰ часов на заседании дис-
сертационного совета D02.042 в Азербайджанском Архитектурно-
Строительном Университете

Адрес: Az-1073, г. Баку, ул. А.Султанова 11, Азербайджанский
Архитектурно-Строительный Университет, II корпус, ауд. 104.

Диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Азербайджанского Архитектурно-Строительного Университета.

Автореферат разослан 23 апреля 2018 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета D 02.042
доктор философии по ф.м.н, доцент

А.М.Исаев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации: В настоящее время при сооружении крупных инженерных комплексов, мостов, эстакад, стационарных платформ и во многих других отраслях народного хозяйства довольно широко используются элементы конструкций, изготовленные из однородных и неоднородных анизотропных материалов. Наиболее распространенными среди них являются прямоугольные и круговые пластинки, а также круговые цилиндрические оболочки поперечного сечения.

В различных отраслях наряду с естественными анизотропными широко применяются искусственно изготовленные анизотропные материалы, которые как правила являются непрерывными неоднородными материалами (стекло волокнистый анизотропный, наполненные полимеры и многие композиты).

Фундаментальные научные исследования в этой области принадлежат М.Т.Губеру, С.Г.Лехницкому и ряда других авторов. В настоящее время данная предметная область довольно интенсивно развивается, причем приобретает актуальность благодаря быстрому внедрению стеклопластиков, которые также являются анизотропными.

В последние годы с появлением новых анизотропных материалов перед инженерами проектировщиками ставится требование максимально правильно оценить свойства материалов конструкций и при их эксплуатации правильно учесть влияние на них окружающей среды. Поэтому появляется необходимость построения эффективной методики расчета с учетом вышеуказанных специфических свойств.

Учитывая выше указанных, можно полагать, что актуальность диссертации не вызывает никакого сомнения.

В целом при выполнении поставленных задач диссертационной работы решены ряд практических задач устойчивости и собственных колебаний непрерывно неоднородно анизотропных прямоугольных и круговых пластин переменной плотностью с учетом сопротивления внешней среды.

Получены конкретные формулы для определения характерных параметров.

Научная новизна работы заключается в том, что впервые были поставлены и решены ряд прикладных задач устойчивости и собственное колебание непрерывно неоднородных анизотропных

пластин с переменной удельной плотностью с учетом сопротивления двух константного, неоднородного и вязкоупругого сопротивления.

Рассмотрены решения конкретных примеров, результаты которых имеют прикладное значение.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в том, что в результате решения всех поставленных задач получены конкретные формулы, позволяющие определить значение критических параметров. Проведены расчеты, а также численный анализ, результаты которых представлены в виде таблиц и графиков зависимостей между характерными параметрами. Вышеуказанное дает возможность непосредственного использования результатов диссертационной работы в инженерной практике для оценки устойчивости и амплитудно-частотных характеристик анизотропных пластин.

Обоснованность и достоверность научных результатов определяются тем, что на основе формулировки всех рассмотренных задач заложены общеустановленные принципы строительной механики. Все полученные решения дифференциальных уравнений являются математически корректными, использованы апробированные инженерные методы, которые подтверждены сравнением результатов с известными решениями, путем непосредственной проверки краевых условий и интегральных соотношений.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на республиканских конференциях аспирантов и молодых специалистов (Баку, 2004-2005г.г., Москва, 2013г.), на I международной конференции молодых ученых посвященной 90-летию Г.А.Алиева проведенной в университете Гафгаз (Баку, 2013г.), на международной конференции по актуальным вопросам математики и механики посвященной 80-летию академика А.Дж.Гаджиева (Баку, 2017 г.), на научных семинарах кафедры «Строительная механика» ААСУ, на семинарах отдела «Механика жидкости, газа и теория пластичности» Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана (ИММ НАНА) (Баку, 2004-2006 г.г.) и отдела «Теория упругости и пластичности» ИММ НАНА (Баку, 2013-2016 г.г.).

Диссертационная работа в целом доложена и обсуждена на совместном научном семинаре кафедр «Строительная механика» и «Теоретическая механика» ААСУ (Баку, 2013-2016 г. г.), в отделе «Теория упругости и пластичности» ИММ НАНА (Баку, 2016 г.), на

расширенном заседании кафедры «Транспортное строительство и организация дорожного движения» ААСУ (Баку, 2017) и в отделе «Теория упругости и пластичности» ИММ НАНА (Баку, 2017 г.)

Публикация. Основные научные результаты диссертации изложены и опубликованы в четырнадцати научных статьях автора.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, основных выводов, списка использованной литературы из 121 наименований. Работа изложена на 138 страницах. Содержит 4 рисунка, 10 графиков и 2 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В введении обосновано актуальность темы диссертации, дается ее общая характеристика, формулируются основные цели и задачи исследования, обсуждается достоверность и научная новизна результатов работы, их практическая ценность. Излагается краткий обзор теоретико-экспериментальных исследований тесно связанных с темой работы.

Первая глава диссертации состоит из двух подразделов. В первом подразделе приводится краткий обзор литературы, отражающий современное состояние вопроса, излагается краткий обзор теоретико-экспериментальных работ, посвященной устойчивости и собственным колебаниям неоднородных круговых и прямоугольных пластин. Второй подраздел данной главы посвящен основным соотношениям теории упругости неоднородных тел, свойствам оснований и методам решений.

Вторая глава состоит из семи подразделов и посвящена устойчивости анизотропных прямоугольных и круговых пластин с учетом внешнего сопротивления и решены наиболее распространенные на практике задачи с учетом различного вида внешнего сопротивления. Проводится сравнение результатов, полученных по предложенной методике с результатами других авторов.

Предполагается, что пластинки находящейся под действием внешних нагрузок T_{11} , T_{12} , T_{13} приложенной в её срединной плоскости находится в линейно неоднородном среде.

Можно показать, что решения задачи приводится к системе двух дифференциальных уравнений относительно прогиба $W(x, y)$ и функции напряжения $F(x, y)$:

$$\begin{aligned} L_1(w, F) &= 0 \\ L_2(F, w) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

здесь, L_1 и L_2 – линейные дифференциальные операторы, четвертого порядка и зависят от свойств материала пластинки и среды:

В (1) должны добавить соответствующие однородные граничные условия.

В подразделе 2.2. решается задача устойчивости прямоугольной пластинки при двухсторонним сжатии, численный расчет произведен для случая одностороннего сжатия, шарнирно закрепленной по всем краям пластинки.

Схема координатной системы представлен в рис. 1.

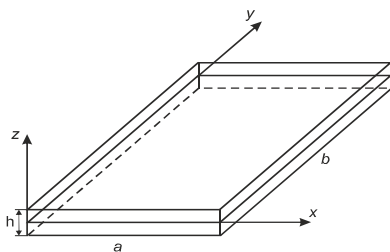


Рис.1. Схема координатной системы.

Неоднородность по толщине принимается по квадратичному закону.

$$a_1(z) = 1 + \gamma \left(\frac{z}{h} \right)^2 \tag{2}$$

Результаты расчетов представлены в рис. 2 и 3

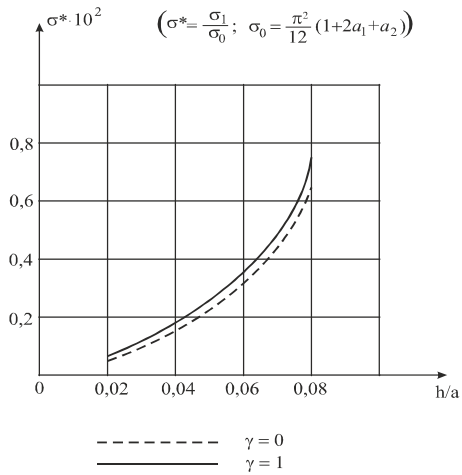


Рис. 2. График зависимостей безразмерных значений критической нагрузки от геометрических параметров пластины (одностороннее сжатие). При $\gamma = 0,02-1,0$.

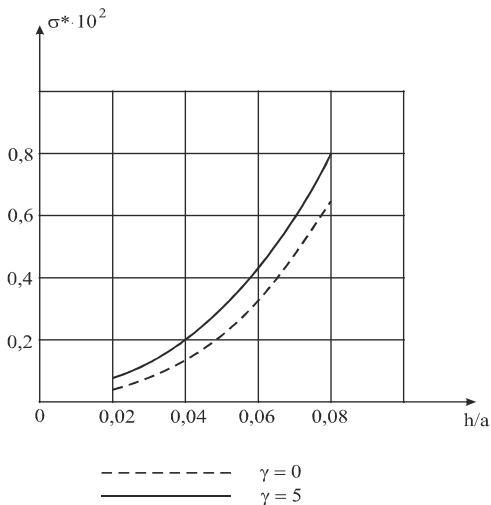


Рис. 3. График зависимостей безразмерных значений критической нагрузки от геометрических параметров пластины (одностороннее сжатие). При $\gamma = 0,02-5,0$.

В подразделах 2.3, 2.4 и 2.5 исследуются задачи устойчивости при двухсторонним равномерном сжатии. Решения задачи строятся применением метода ортогонализации Бубнова-Галеркина.

Предполагается, что пластины с размерами $(a \times b \times h)$ лежат на основании Винклера и на линейно анизотропной основании, реакции q , которой с прогибом $w(x,y)$ связаны следующим соотношением:

$$q = k_1 w - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

где, $k_1 \left(\frac{H}{m^3}\right), k_2 \left(\frac{H}{m}\right), k_3 \left(\frac{H}{m}\right)$ являются характеристиками анизотропного основания и определяются путем экспериментов.

В первом приближении для определения критической нагрузки получены, конкретные формулы и проведен численный расчет. Результаты расчета представлены в виде графиком зависимости между критической нагрузкой и геометрическими параметрами пластинки, рис. 4.

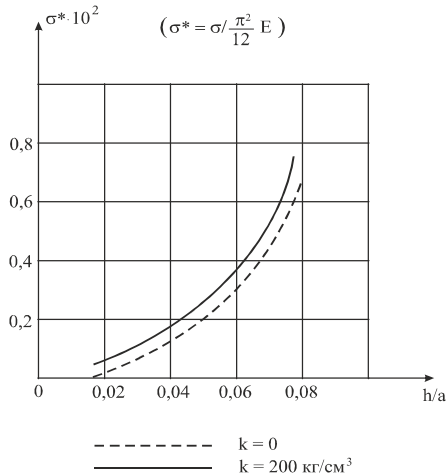


Рис. 4. График зависимости между безразмерной величиной критической нагрузки от геометрических параметров пластины.

Как видно из рис. 4 учет неоднородности пластинки и анизотропности основания существенно влияет на критическую нагрузку.

В подразделе 2.6 решается аналогичная задача, предыдущих подразделов отличается тем, что пластины лежат на квадратичном неоднородном основании. Предполагается, что основания характеризуется следующим соотношением.

$$q = k \left[1 - a_1 \left(\frac{x}{a} \right) + a_2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] w(x, y) \quad (4)$$

здесь, k - коэффициент Винклера, a_1 и a_2 - являются характеристиками основания и определяется экспериментальным путем.

Задача решается с применением метода ортогонализации Бубнова – Галеркина. Для первого приближения найдена формула для определения критической нагрузки.

В подразделе 2.7 исследуется осесимметричная формы потери устойчивости однородно анизотропной круговой пластинки лежащей на неоднородном основании.

Предполагается, что пластинка по всему контуру жестко закреплена. Расчет проведен для анизотропной пластинки изготовленной из натуральной древесины

$$\begin{aligned} E_1 &= 10^5 \text{ кг/см}^2 & E_2 &= 0,0442 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 \\ \nu_2 &= 0,01 & G &= 0,75 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 \end{aligned}$$

и дельта древесина (плиточная), которая изготавливается из ряда слоев древесины (шпона), пропитанных слоев

$$\begin{aligned} E_1 &= 3 \cdot 0,5 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 & E_2 &= 0,467 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 \\ \nu_2 &= 0,02 & G &= 0,22 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2 \end{aligned}$$

Результаты представлены в виде графика, рис. 5

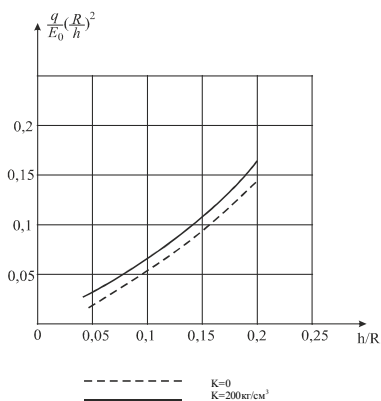


Рис. 5. График зависимости безразмерной значения критической нагрузки от геометрических параметров пластины, (h/R).

Третья глава посвящена собственным колебаниям анизотропных непрерывно неоднородных пластин с учетом внешнего сопротивления.

В связи с тем, что система уравнений движения являются сложными, обычно пренебрегаются приближенной постановки решения задач, где инерционные члены, кроме поперечного отбрасываются и при решении задачи учитывается поперечное свободное колебания.

Окончательное уравнение для свободной колебании приводиться следующему уравнению с постоянными коэффициентами.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial^2 y} + a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$2a_1 = \frac{a_{12}^o + a_{21}^o + 2a_{33}^o}{a_{11}^o}; \quad a_2 = \frac{a_{22}^o}{a_{11}^o}; \quad \rho = \frac{\gamma \cdot h}{g \cdot a_{11}^o}$$

$a_{11}^o, a_{12}^o, a_{21}^o, a_{33}^o$ — являются характеристиками однородной анизотропной пластинки; γ — удельный вес материала пластинки, g — ускорение силы тяжести.

При шарнирном закреплении краев пластинки прогиб должен удовлетворит следующие граничные условия.

$$w = 0, \quad \text{при } x=0 \quad \text{и} \quad y=0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x=a \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y=b \quad (6)$$

В этом случае для прогиба можем принять следующие выражения

$$w(x, y, t) = w_o \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cos w_{mn} t \quad (7)$$

здесь, m, n — число полуволны вдоль сторон пластинки, W_{mn} — частота колебания. Подставляя (7) в (5) получим:

$$w_{mn}^2 = \frac{h^3}{12\rho} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + a_2 \left(\frac{n^2\pi}{b} \right)^4 + 2a_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n^2\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (8)$$

При конкретных значения характерных параметров проведен численный расчет и результаты представлены в рис. 6.

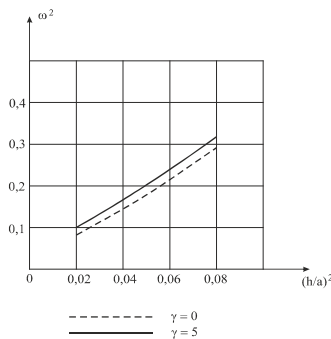


Рис. 6. График зависимости квадрата частоты от параметров пластины, $(h/a)^2$.

В подразделе 3.1 решается задача собственной колебании однородно анизотропной прямоугольной пластинки с учетом переменности плотности по длине и толщине лежащей на неоднородном упругом основании. Реакция основания q , который с прогибом связан следующим соотношением

$$q = -k \left(1 + \varepsilon \varphi_o(x, y) \right) w \quad (9)$$

здесь, $K \left(\frac{N}{m^3} \right)$ – коэффициент Винклера, $\varphi_o(x)$ непрерывная функция, w – прогиб и $\varepsilon \in [0, 1]$.

Уравнение движения записывается в следующем виде:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + k(1 + \varepsilon \phi(x, y))w + \bar{\rho} f(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

здесь,

$$D_1 = a_{11}^o; \quad D_2 = a_{12}^o + a_{21}^o + 2a_{33}^o; \quad D_3 = a_{22}^o; \quad \bar{p} = \rho_o \int_{-n}^{+h} \psi(z) dz$$

Уравнение (10) является сложным и решение строится комбинированным приближенным аналитическим методами. В первом этапе решение (10) ищется в следующем виде.

$$W = V(x, y) \sin \lambda t \quad (11)$$

здесь, $V(x, y)$ удовлетворяет однородные граничные условия.

Подставляя (11) в уравнении (10) получим уравнение относительно $V(x, y)$.

Как было отмечено выше для нахождения λ^2 - применяется метод Бубнова-Галеркина.

Численный расчет произведен для случая $\varphi_o(x, y) = \frac{x}{a} \frac{y}{b}$, а для цилиндрической формы колебания $\varphi_o(x) = x \cdot a^{-1}$.

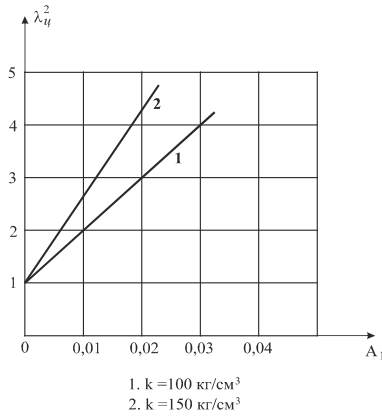


Рис. 7. График зависимости квадрата частоты от параметров оснований, (A_1).

В подразделе 3.4 исследуется задача собственной колебании анизотропной прямоугольной пластинки с учетом неоднородности плотности и сопротивления квадратично неоднородной основании.

Уравнение движения в данном случае относительно прогиба записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \bar{\rho}\psi_1(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y} + 2(D_{12} + D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \\
 & + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} K\left[1 - a_1\frac{x}{a} + a_2\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \cdot w = 0
 \end{aligned} \quad (12)$$

Решение (12) строится аналогично предыдущем подразделе, причем функция выбирается в следующем виде:

$$W = W_o \varphi(x) \cdot \psi(y) \quad (13)$$

здесь, функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – удовлетворяют соответствующие краевые условия.

При конкретных значения характерных параметров проведен численный расчет и результаты представлены в виде графиков между значении частоты λ^2 и свойств основания, рис. 8.

(14)

$$\bar{\lambda}_1^{-2} = 1 + \frac{k}{4} \frac{a_2 - 2a_1 + 4}{\left[D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2(D_{16} + D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right]}$$

Для квадратной пластинки получим

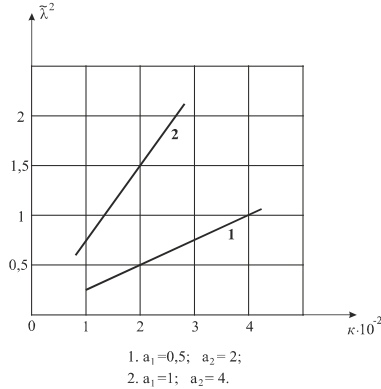


Рис. 8. График зависимости квадрата безразмерной величины частоты от неоднородности основания.

$$\bar{\lambda}_{1k}^{-2} = 1 + \frac{k}{4} \frac{(a_2 - 2a_1 + 4)}{D_{11} + 2(D_{16} + D_{66} + D_{22}) \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4}$$

Отметим, что при жестком закреплении сторон пластинки можно принять следующие аппроксимации.

$$\begin{aligned} 1. \quad \varphi_{(x)} &= 1 - \cos \frac{2m\pi}{a} x; & \psi_{(y)} &= \left(1 - \cos \frac{2\sigma n}{b} y \right) \\ 2. \quad \varphi_{(x)} &= \bar{x}^{-2} (\bar{x} - 1)^2; & \varphi_{(y)} &= \bar{y}^{-2} (\bar{y} - 1)^2; \\ & \bar{x} &= x \cdot a^{-1}; & \bar{y} &= y \cdot b^{-1}; \end{aligned}$$

В подразделах 3.5, 3.6 и 3.7 рассматриваются решения анизотропных задач однородной ортотропной упругой прямоугольной пластинки, по длине неоднородной плотности и лежащей на непрерывно неоднородной упругой основании.

Предполагается, что пластина полностью лежит на основании. Во втором случае считается что материал пластинки является однородно анизотропным.

Анализ проведено для случая цилиндрической формы изгибного колебания.

В следующем подразделе аналогичная задача решена с учетом анизотропного сопротивления.

Численный анализ проведен для случае, когда пластинка свободно оперта.

Результаты расчета от зависимости характерных параметров в виде графика представлены на рис. 9.

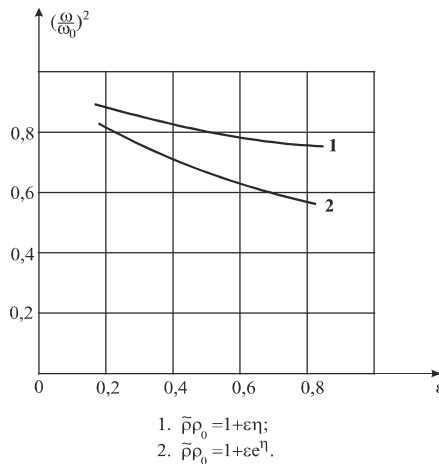


Рис. 9. График зависимости квадрата безразмерной величины частоты от параметров неоднородности характеризующие плотность пластины.

В подразделе 3.7 решается, задача собственной колебании неоднородной по толщине круговой пластинки с учетом однородного линейного вязко упругого основания, где реакция основания с прогибом связан следующим соотношением:

$$q = k_1 w + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (15)$$

здесь k_1 и k_2 – характеризуют свойства основания и определяется экспериментально.

В подразделе 3.8 исследуется задача собственной колебании анизотропной прямоугольной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании.

Предполагаемый материал пластинки является анизотропно неоднородной по толщине пластинки, а также плотность является неоднородной по толщине

$$a_{ij} = a_{ij}^o \cdot f_{(z)}; \quad \rho = \rho_o \cdot \Psi_{(z)}; \quad (16)$$

Связь между компонентами тензора напряжений и деформаций записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (a_{11}^o \varepsilon_{11} + a_{12}^o \varepsilon_{22} + a_{13}^o \varepsilon_{12}) \cdot f(z) \\ \sigma_{22} &= (a_{21}^o \varepsilon_{11} + a_{22}^o \varepsilon_{22} + a_{23}^o \varepsilon_{23}) \cdot f(z) \\ \sigma_{12} &= (a_{31}^o \varepsilon_{11} + a_{32}^o \varepsilon_{22} + a_{33}^o \varepsilon_{33}) \cdot f(z) \end{aligned} \quad (17)$$

здесь, a_{ij}^o и ρ_o – соответствуют к однородному анизотропному материалу.

Уравнения движения в данном случае записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} &a_{11}^o \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (a_{12}^o + 2a_{12} + a_{21}^o) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22}^o \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ &+ (a_{13}^o + 2a_{31}^o) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + (a_{32}^o + 2a_{13}^o) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \\ &+ \mu^{-1} \left[k_v w - k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \bar{\rho} \mu^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

здесь, введены обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho_0 h \int_{-l/2}^{+l/2} \psi(z) dz; & A_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} f(z) dz; & A_2 &= \int_{-h/2}^{+h/2} f(z) z dz; & (19) \\ A_3 &= \int_{-h/2}^{+h/2} f(z) z^2 dz; & \mu &= A_2 \cdot A_1^{-1} - A_3 \end{aligned}$$

При решении в первом этапе используется метод разделения переменных, причем $W(x, y, z)$ принимается в следующем виде:

$$w(x, y, t) = V(x, y) e^{i\omega t} \quad (20)$$

здесь, $V(x, y)$ - удовлетворяет соответствующие краевые условия, ω - частота.

В результате полученное уравнение относительно $V(x, y)$ решается с применением метода Бубнова-Галеркина.

Для цилиндрической формы изгибного колебания проведен расчет, причем характерные функции выбирается в следующем виде:

$$\text{функция аппроксимации: } \varphi(x) = \sin m\pi x.$$

функция неоднородности:

$$\psi_{(z)} = 1 + \delta e^{-z}; \quad \psi_{(z)} = 1 + \delta e^{\bar{z}}; \quad \delta \in [0, 1]; \quad \bar{z} = h^{-1} z$$

Значение безразмерной частоты

$$\omega_1^{-2} = \frac{1}{1 + 0,9\delta}; \quad \omega_2^{-2} = \frac{1}{1 + 2,13\delta} \quad (21)$$

Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значение зависимости безразмерной частоты от параметра неоднородности основания

δ	$\overline{\omega}_1^2$	$\overline{\omega}_2^2$
0	1	1
0,25	0.816	0,653
0,50	0,69	0,653
0,75	0,597	0,385
1,0	0,526	0,315

При расчете в основном использованы и следующие данные анизотропного материала.

$$E^0_1 = 1,724 \cdot 10^{11} \left(\frac{N}{m^2} \right); \quad E^0_2 = 7 \cdot 79 \cdot 10^9 \left(\frac{N}{m^2} \right)$$

$$\nu_1 = 0,35; \quad K_p = 10^6 N/m^3; \quad K_v = 10^4 N/m$$

В подразделе 3.8 впервые исследуется задачи собственного колебания анизотропной пластинки, неоднородно по главным направлениям прямоугольной пластинки лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Реакция основания, который характеризуется соотношением.

$$q = k_1(x, y)w + k_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (22)$$

Здесь функции $k_1(x, y)$ и $k_2(x, y)$ являются непрерывными функциями и определяются экспериментальным путем.

Связь между напряжениями и деформаций записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f_1(x, y) f_2(z) (a_{11}^o \varepsilon_{11} + a_{12}^o \varepsilon_{22} + a_{13}^o \varepsilon_{12}) \\ \sigma_{22} &= f_1(x, y) f_2(z) (a_{21}^o \varepsilon_{11} + a_{22}^o \varepsilon_{22} + a_{23}^o \varepsilon_{12}) \\ \sigma_{33} &= f_1(x, y) f_2(z) (a_{31}^o \varepsilon_{11} + a_{32}^o \varepsilon_{22} + a_{32}^o \varepsilon_{12}) \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично к первому случаю получим следующее уравнение движения.

$$L(w) + K_1(x, y)w + [K_1(x, y) + \bar{\rho}g_1(x, y)] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad + \bar{\rho} = p_0 h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi_z(z) d\bar{z} \quad (24)$$

здесь $L(w)$ – линейный оператор и существенно зависит от функций $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $f(x, y)$ и $g(x, y)$

В первом этапе используя метод разделения переменных и выбирая $w(x, y, t)$ в следующие виде:

$$w(x, y, t) = w_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24) получим уравнения для $W_0(x, y)$:

$$\bar{L}(V) + K_1(x, y)W_0(x, y) - \omega^2 (K_1(x, y) + \bar{\rho}g_1(x, y))w_0(x, y) = 0 \quad (26)$$

В (25) должны добавит соответствующее граничные условия.

Во втором этапе для решения уравнении (26) используется метод Бубнова-Галеркина, причем функция выбирается в следующем виде

$$w_0(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \phi_i(x) \cdot \psi_j(y) \quad (27)$$

здесь, A_{ij} – постоянные величины, а каждый $\phi_i(x)$ и $\psi_j(y)$ – должны удовлетворят соответствующие однородные условия.

Функция ошибки в данном случае с учетом (27) записывается в следующем виде

$$\eta(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [\bar{L}(\phi_i \psi_j) + K_1(x, y)\phi_i(x)\psi_j(y) - \omega^2 (K_2(x, y) + \bar{\rho}g(x, y))\phi_i(x)\psi_j(y)] \neq 0 \quad (28)$$

Условия ортогонализации имеет следующий вид:

$$\int_0^a \int_0^b \eta(x, y) \phi_k(x) \psi_q(y) dx \cdot dy = 0 \quad k, q = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

В общем случае ω^2 – определяется из системы уравнений относительно A_{ij} .

Система (29) является линейным однородным алгебраическим уравнением и для существования нетривиальных решений главный определитель должен равняться нулю

$$\|\omega^2\| = 0 \quad (30)$$

(30) относительно ω^2 – является нелинейно алгебраическим уравнением и нахождение решения в произвольном приближении не вызывает особого труда.

Однако, в инженерной практике обычно пренебрегаются нахождением основного тона колебаний, что соответствует к первому приближению.

$$\omega^2 = \frac{\iint_{a_o}^{b_o} [\bar{L}(\phi_1\psi_1) + K_1(x,y)\phi_1(x)\psi_1(y)]\phi_1(x)\psi_1(y) dx dy}{\iint_{a_o}^{b_o} [K_2(x,y) + \bar{\rho}g(x,y)]\phi_1^2(x)\psi_1^2(y) dx dy} \quad (31)$$

Расчет произведен для цилиндрической формы изгибного колебания, при следующих значениях характерных функций

$$K_2(x) = K_2^o \left(1 + \alpha \frac{x}{a}\right); \quad g(x) = \bar{p}_o \left(1 + \mu \frac{x}{a}\right); \quad \varphi(x) = \sin \frac{\pi}{a} x; \quad \alpha \in [0,1]; \quad \mu \in [0,1]$$

Произведя ряд преобразований получим:

$$\bar{\omega}_1^{-2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_o}\right)^2 = \frac{1}{1 + c \frac{2 + \alpha}{2 + \mu}} \quad (32)$$

Результаты численных расчетов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Значение зависимости значения квадрата частоты от параметра неоднородности пластинки основания.

α	$\bar{\omega}_1^{-2}$	
	$c = 0,2$	$c = 0,4$
0	0,86	0,76
0,25	0,85	0,74
0,50	0,83	0,71
0,75	0,82	0,69
1,0	0,81	0,67

Как видно из таблицы 2, значение квадрата частоты существенным образом зависит от неоднородности пластинки и основания.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Даны постановки и решены некоторые задачи устойчивости и собственной колебании непрерывно неоднородно анизотропных прямоугольных и круговых пластин с учетом различного рода внешних сил и влияния сопротивления внешней среды, и построен методика их решений.

2. Используются линейные модели характеризующие основание типа: Пастернака П.Л., Фусса-Винклера и Карнет-Ржаницына.

3. Впервые рассмотрена постановка задач собственной колебании неоднородно анизотропной прямоугольной и круговой пластин с разными однородными граничными условиями и построена методика их решений.

4. Впервые решена задача собственной колебании с учетом влияния неоднородного вязко упругого сопротивления, когда свойства материала являются анизотропными, их упругие характеристики и плотность являются непрерывными функциями трех пространственных координат и с помощью применения приближенных аналитических методов получены конкретные формулы для инженерного расчета.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

1. Гаджиев В.Д., Шарифов В.Л. Собственное колебание анизотропной прямоугольной пластинки с учетом анизотропного сопротивления. Журнал «Механика. Машиностроение», №3. Баку-2003, с.3-4.

2. Шарифов В.Л. Собственное колебание ортотропной прямоугольной пластинки с учетом анизотропного сопротивления. Журнал «Сб. науч. трудов по механике», № 13, Баку-2003, с. 69-73.

3. Шарифов В.Л. О собственном колебании непрерывно неоднородно упругой пластинки лежащей на неоднородном основании. Журнал «Сб. науч. трудов по механике», № 13. Баку-2003, с. 74-78.

4. Агамалиев Н.Ч., Гаджиев В.Д., Шарифов В.Л. Устойчивость прямоугольной, ортотропной пластинки с учетом анизотропного сопротивления внешней среды. Журнал «Механика. Машиностроение», №2, Баку-2005, с. 3-4.

5. Гаджиев В.Д., Шарифов В.Л. Устойчивость анизотропной пластинки лежащей на неоднородном основании и находящийся при двухстороннем сжатии. Журнал «Прикладная механика» №2, Баку-2005, с.53-57.

6. Гаджиев В.Д., Шарифов В.Л. О колебании неоднородной ортотропной круговой пластинки с учетом сопротивления неоднородного основания. Журнал «Теоретическая и прикладная механика», № 1. Баку-2006, с. 78-81.
7. Шарифов В.Л. Об устойчивости прямоугольной ортотропной пластинки лежащей на неоднородном основании. Журнал «Теоретическая и прикладная механика», №2. Баку-2006, с. 96-100.
8. V.L.Şərifov. Qeyri-bircins ortotrop lövhələrin rəqsləri məsələləri. Gənc tədqiqatçıların I Beynəlxalq elmi konfransı. Qafqaz Universiteti, Bakı-2013, 25-27 aprel 2013, s. 382-383.
9. Шарифов В.Л. Устойчивость неоднородных анизотропных пластинок в анизотропно сопротивляемой среде при двухстороннем сжатии. Журнал «Теоретическая и прикладная механика», №1. Баку- 2013, с. 81-84.
10. Шарифов В.Л. Об устойчивости неоднородной ортотропной пластинки в сопротивляемой среде. Журнал «Естественные и технические науки», №2(64), Москва-2013, с.44-47.
11. Шарифов В.Л. О колебании неоднородных ортотропных пластинок. Журнал «Теоретическая и прикладная механика», № 2. Баку-2013, №, с.88-90.
12. Гаджиев В.Д., Гасымов Г.М., Шарифов В.Л. Свободные поперечные колебания неоднородно анизотропной прямоугольной пластинки, лежащей на неоднородно вязкоупругом основании. Журнал «Прикладная и теоретическая механика». № 3-4. Баку-2017, с.100–106.
13. Шарифов В.Л. Поперечные колебание анизотропно-неоднородной прямоугольной пластинки лежащей на основании типа Пастернака П.Л. Журнал «Теоретическая и прикладная механика», № 3-4, Баку-2017, с.154-158.
14. Nəsiyev V.C., Qasimov G.M., Sharifov V.L. Free transverse vibrations of a nonhomogeneous anisotropic rectangular plate lying on a nonhomogeneous visco-elastic foundation. Akademik Akif Nəsiyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Konfransın materialları, AMEA, Bakı, dekabr 2017-ci il, s.67-68.

При постановке задач и обсуждении полученных результатов в статьях [1, 4, 5, 12, 13, 14] участвовали соавторы. Принятые решения принадлежат автору.

VALEH LƏTİF OĞLU ŞƏRİFOV

QEYRİ BİRCİNS ANİZOTROP ELASTİK LÖVHƏLƏRİN XARİCİ MÜHİTİN MÜQAVİMƏTİ NƏZƏRƏ ALINMAQLA DAYANIQLIĞI VƏ MƏXSUSİ RƏQSLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işində xarici mühitin müqaviməti nəzərə alınmaqla anizotrop elastik dairəvi və düzbucaqlı lövhələrin dayanıqlıq və məxsusi rəqsləri haqqında məsələlər tədqiq olunmuşdur.

İşdə aşağıdakı konkret məsələlər həll olunmuşdur: ortotrop və anizotrop düzbucaqlı lövhələrin iki tərəfli sıxılmada Fuss-Vinkler, anizotrop və qeyri bircins müqavimətlər nəzərə alınmaqla dayanıqlıq məsələləri; anizotrop əsas üzərində yerləşmiş anizotrop düzbucaqlı lövhələrin və ortotrop dairəvi lövhələrin xarici mühitin qeyri bircins müqaviməti nəzərə alınmaqla dayanıqlığı məsələləri; qeyri bircins və anizotrop əsasların müqaviməti nəzərə alınmaqla izotrop, anizotrop, qeyri bircins düzbucaqlı və dairəvi lövhələrin məxsusi rəqsləri haqqında məsələlər.

Məsələlərin həlli əsasən Bubnov-Qalyorkinin ortoqonallaşdırma və dəyişənlərə ayrılma metodlarından istifadə etməklə qurulmuşdur. Alınmış nəticələr kompüterdə analiz edilmişdir və dəyişənlər arasındakı asılılıqların qrafikləri qurulmuşdur.

VALEH LATİF OGLU SHARİFOV

**THE STABILITY AND FREE VIBRATIONS OF ELASTIC
ANISOTROPIC PLATES TAKING INTO ACCOUNT THE
STRENGTH OF EXTERNAL ENVIRONMENT**

SUMMARY

In the thesis investigates essentially the stability problems of plates which made of elastic and non-homogeneous elastic materials. Consider that construction elements which could be rest on non-homogeneous and anisotropic foundation. In the thesis the following concrete problems are solved: the stability problems of rectangular and circular plates are acted by different loads taking into account the strength of external environment; free vibrations of the rectangular and circular plates on the basis of the non-homogeneous, anisotropic and Fuss-Winkler's foundations and at the last the stability problems of rectangular plates compressed in one and two dimensions taking into account the strength of the non-homogeneous and anisotropic foundation.

The solutions of the problems are solved by Bubnov-Galerkin's method and result obtained for every cases were investigated by the computer and described as the graphs between the critical parameters.