AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

Z-ƏDƏDLƏR ÜZRƏ ƏMƏLLƏR VƏ ONLARIN QƏRAR QƏBULETMƏYƏ TƏTBİQİ

İxtisas: 3338.01 – "Sistemli analiz, idarəetmə və informasiyanın işlənməsi (idarəetmə və qərar qəbuletmə)"
Elm sahəsi: Texnika
İddiaçı: **Akif Vəli oğlu Əlizadə**

Elmlər doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2025

Dissertasiya işi Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin "Sənayedə və iqtisadiyyatda intellektual idarəetmə və qərar qəbuletmə sistemləri" elmi-tədqiqat laboratoriyasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi: AMEA-nın müxbir üzvü,
Texnika elmlər doktoru, professor
Rafiq Əziz oğlu Əliyev

Rəsmi opponentlər: AMEA-nın müxbir üzvü,
Texnika elmlər doktoru, professor
İsmayıl Mahmud oğlu İsmayılov
Texnika elmlər doktoru, professor
Ələkbər Əli Ağa oğlu Əliyev

Texnika elmlər doktoru, professor
Kəmalə Rafiq qızı Əliyeva

Texnika elmlər doktoru, professor
Məhəmməd Aydın oğlu Əhmədov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən BED 2.48 Birdəfəlik dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü,
Texnika elmlər doktoru, professor
Rafiq Əziz oğlu Əliyev

Dissertasiya şurasının elmi katibi: Texnika elmlər doktoru, professor
Xanlar Mehvəli oğlu Həmzəyev

Elmi seminarın sədri: Texnika elmlər doktoru, professor
Tərlan Səməd oğlu Abdullayev

İMZANI TƏSDİQ EDİRƏM
ADNSU-nun Elmi katibi
dosent N.Əliyeva

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Müasir dünyada qərar qəbuletmə problemi insan fəaliyyətinin bir çox sahəsində tətbiq tapdığı üçün xüsusilə aktual bir məsələdir. Müxtəlif texniki, iqtisadi və sosial strukturların daim ağırlaşması yeni metodların tapılmasını və tətbiq edilməsini, habelə qərar qəbul edənin qərar verməsi üçün mövcud üsulların təkmilləşdirilməsini tələb edir.

Tədqiqat obyekti kimi mürəkkəb qərar qəbuletmə sistemləri, elmin müxtəlif sahələrində, məsələn, müxtəlif texnoloji proseslərin idarə olunması, sistem analizi və s. sahələrdə tətbiq edilir. Hal-hazırda, bir çox müasir istehsal və iş proseslərində mütəxəssislər qeyri-stasionar istehsal prosesləri, qiymət dəyişkənliyi, iş şəraitinin dəyişməsi və s. mühitdə işləmək məcburiyyətindədirlər. Bu sahələrdə, professor Lütfi Zadənin təklif etdiyi qeyri-səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi mühüm rol oynayır ki, bu da linqvistik düşüncəni riyazi ifadələr şəklində formalaşdırmağa imkan verir və yeni elmi metodların yaranmasına və tətbiq olunmasına şərait yaradır.

Von Neumann və Morgensternin gözlənilən faydalılıq nəzəriyyəsinə qədər mövcud qərar qəbuletmə nəzəriyyələrinin çoxu ciddi bir riyazi təməl üzərində qurulub və qənaətbəxş nəticələr verir. Bununla yanaşı, xüsusi vəziyyətlərdə qərar qəbul etmək üçün işlənmişdir. Mövcud qərar qəbul etmə nəzəriyyələrinin bir sıra vacib çatışmazlıqları var: real qüsurlu məlumatlar əvəzinə mükəmməl informasiyaya əsaslanan texnologiyadan istifadə edilir; gələcək obyektiv şərtlər haqqında yaxşı formalaşdırılmış strukturlu bilik tələb edilir; klassik ehtimal ölçüsündən istifadə edilir, əslində ehtimallar qeyri-dəqiqdir; real üstünlüklər münasibəti əvəzinə binar məntiqə əsaslanan qeyri-müəyyənlik ölçüsündən istifadə edilir; insanın məlumatın linqvistik təsviri ilə nəticə çıxartması faktı nəzərə alınmır; qərar verən şəxslərin davranış müəyyənləşdiricilərinin qarşılıqlı təsiri nəzərə alınmır; həqiqi qərar qəbul etmək üçün müvafiq məlumatların qismən etibarlı olması nəzərə alınmır. İşlərin əksəriyyəti birinci dərəcəli qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarların qəbuluna həsr edilmişdir. Beləliklə, yuxarıda göstərilən məhdudiyyətlərdən azad bir qərar qəbuletmə nəzəriyyəsini inkişaf etdirməyə ehtiyac var.

Dissertasiya qərarlarının qəbulu ilə bağlı iki növ qeyri-müəyyənlik şəraitində əldə edilən müvafiq qeyri-mükəmməl məlumatların hərtərəfli nəzərdən keçirilməsinə əsaslanaraq yeni qərar nəzəriyyəsinin əsaslarını təklif edir. Yuxarıda göstərilənlər dissertasiyada qoyulmuş elmi problemin aktuallığını göstərir. Təklif olunan nəzəriyyə, modellər və qərar qəbuletmə metodlarının etibarlılığı və tətbiqi standart və real qərar qəbuletmə məsələlərinin nümunəsində göstərilir. Bu baxımdan dissertasiyada aparılan tədqiqatların aktuallığı aydın görünür.

Dissertasiya işinin məqsəd və vəzifələri. Dissertasiyanın məqsədi Z-ədədlərlə ifadə edilən qeyri-müəyyənlik şəraitində nəzəriyyənin, modellərin və qərar qəbuletmə metodlarının inkişaf etdirilməsidir. Bu məqsədə çatmaq üçün aşağıdakı vəzifələr qarşıya qoyulmuş və uyğun məsələlər həll edilmişdir:

– Mövcud qərar qəbuletmə metodlarının müqayisəli təhlili; – qərar qəbuletmə proseslərində məlumatların təhlili; – Z - ədədlərə əsaslanan məlumatların təhlili; – Z-ədədlər üzərində əməllərin yaradılması; – Z - məlumatlara əsaslanaraq qərar qəbuletmə modelinin qurulması; – Z - informasiya əsasında xətti proqramlaşdırma modelinin qurulması; – Z - ədədlərin müqayisəsi əsasında qərar qəbuletmə üsulunun yaradılması; – Z - məlumatların tətbiqi əsasında təklif olunan metod və modellərin effektivliyinin yoxlanması.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində bu problemlərin həlli üçün qeyri-səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi, imkanlar nəzəriyyəsi, soft kompütinq texnologiyaları, faydalılıq nəzəriyyəsi, sistem təhlili metodları, dürüst olmayan məlumatlara əsaslanan qərar qəbul etmə üsulları, Z-ədədlər nəzəriyyəsi, qeyri-müəyyənlik nəzəriyyəsi, qeyri-səlis məntiqi nəticəçıxarma metodlarından istifadə edilmişdir. Alınan nəzəri nəticələrin təsdiqi üçün riyazi və simulyasiya modelləşdirmə üsulları ilə birlikdə eksperimental tədqiqat metodlarından istifadə edilmişdir. Kompüter simulyasiyası MatLab proqramlar paketinə uyğun olaraq yaradılan ZLab proqramlar paketində aparılıb və nəticələrin effektivliyini göstərir.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. İşin nəticələrinin elmi yeniliyi aşağıdakılardır: – Qeyri-səlis məlumatlara əsaslanan qərar qəbuletmə məsələlərinin həlli metodologiyası təklif edilmişdir; – Z-ədədlər vasitəsilə ifadə edilə bilən qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarların qəbul edilmənin nəzəri müddəaları təklif olunmuşdur; – Diskret Z-ədədlər üzərində hesab əməllər ilk dəfə işlənmişdir; – Bilavasitə Z-ədədlərlə ifadə edilən Z-məlumat şəraitində qərar qəbuletmə üsulu təklif olunmuşdur; – Z-məlumat şəraitində faydalılıq funksiyasından istifadə edilmədən qərar qəbuletmə modeli işlənmişdir; – Z-məlumat şəraitində çoxmeyarlı qərar qəbuletmə modelinin qurulması üçün metod təklif olunmuşdur.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Təklif olunan modellər və qərar qəbuletmə üsulları, qeyri-müəyyənlik şəraitində, qeyri-müəyyənliyin daha ətraflı şəkildə təsviretmə qaydasından istifadə etməklə, qərar qəbulunun psixoloji və fərdi müəyyənedicilərini, habelə interval, qeyri-səlis və Z-ədədlərlə ifadə olunan məlumatların mövcudluğunu nəzərə alınmaqla mövcud klassik metodlardan fərqlənir. Təklif olunan modellərin və qərar qəbuletmə metodlarının praktik baxımdan aşkar şəkildə üstünlükləri müxtəlif praktiki qərar qəbuletmə məsələlərinin həlli ilə sübut olunmuşdur. Dissertasiya işində təklif olunan nəzəri müddəalar Matlab proqramlar paketinə uyğun olaraq yaradılmış Zlab proqramlar paketində geniş tətbiq edilmişdir. O cümlədən, Z-ədədlər üzərində əməllər, Z-xətti proqramlaşdırma, Pareto optimallıq və s. Zlab paketinə daxil edilmiş və dünyanın müxtəlif ölkələrində geniş istifadə olunur.

Dissertasiyanın nəticələri ümumi xarakter daşıyır, təklif olunan modellər və qərar qəbuletmə üsulları iqtisadiyyatın müxtəlif sahələrində, psixologiya, sosiologiya, texnika sahələrdə və s. tətbiq edilə bilər.

Aprobasiya və tətbiqi. Dissertasiyanın əsas elmi və praktiki nəticələri Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin "Sənayedə və iqtisadiyyatda intellektual idarəetmə və qərar qəbuletmə sistemləri" elmi-tədqiqat laboratoriyasında, eləcə də beynəlxalq konfranslarda təşkil olunmuş elmi seminarlarda müzakirə edilmişdir:

– Second International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Siegen, Germany, June 25-27, 1996.

– Third International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Wiesbaden, Germany, October 5-7, 1998.

– Fifth International Conference on Soft Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control. Famaqusta, North Cyprus, 2-4 September, 2009.
– Ninth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing. Prague, Czech Republic, August, 2010.
– Sixth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation Tashkent, Uzbekistan, November 25-27, 2010.
– Sixth International Conference on Soft Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control. Antalya, Turkey, August 26-27, 2011.
– Tenth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing. Lisbon, Portugal. August 29-30, 2012.
– Seventh International Conference on Soft Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control. İzmir, Turkey. August 29-30, 2013.
– Seventh World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation Tashkent, Uzbekistan, November 25-27, 2012
– Eleventh International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing. Paris, France. September 2-3, 2014.
– Eighth International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control. Antalya, Turkey. September 3-4, 2015.
– ICAFS-2016, 12th International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS 2016, 29-30 August 2016, Vienna, Austria;
– ICSCCW-2017, 9th International Conference on Theory and Application of Soft Computing, Computing with Words and Perception – ICSCCW-2017, 22-23 August 2017, Budapest, Hungary;
– ICAFS-2018, 13th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing – ICAFS-2018, 26-27 August 2018, Warsaw, Poland;
– ICAFS-2020, 14th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing – ICAFS-2020, 27-28 August 2020, Budva, Montenegro;

– WCIS-2020, 11th World Conference on Intelligent systems for industrial automation - WCIS-2020, 26-28 November, Tashkent, Uzbekistan.
– ICSCCW-2021, 11th International Conference on Theory and Application of Soft Computing, Computing with Words and Perceptions and Artificial Intelligence - ICSCCW-2021;
– ICAFS-2022, 15th International Conference on Applications of Fuzzy Systems, Soft Computing and Artificial Intelligence Tools – ICAFS-2022;
– WCIS-2022, 12th World Conference "Intelligent System for Industrial Automation", (WCIS-2022).

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti, "Sənayedə və iqtisadiyyatda intellektual idarəetmə və qərar qəbuletmə sistemləri" elmi-tədqiqat laboratoriyası.

Dissertasiya işinin tərkibi. Dissertasiya işi girişdən, 6 fəsildən, nəticədən, istifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından və əlavədən ibarətdir.

Nəşrlər. Ümumilikdə, 61 məqalə çap olunmuşdur. Tədqiqat üzrə çap olunan 32 məqalədən 13-ü Web of Science, 7-si SCOPUS, 12-sı Conference Proceedings Citation Index bazalarına daxil olmuşdur.

İŞİN ƏSAS MƏZMUNU

Girişdə mövzu sahəsinin aktuallığı, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri, müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar, tədqiqat metodları, tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti qeyd olunmuşdur.

Birinci fəsildə ("Z-ədədlər nəzəriyyəsinin tədqiqinin vəziyyəti və qərar qəbuletməyə tətbiqinin təhlili") Z-ədədlərlə ifadə edilən informasiya şərh edilmiş, Z-ədədlərə əsaslanan qərar qəbuletmə ilə bağlı mövcud işlərin icmalı aparılmışdır. Mövcud işlərin çatışmazlıqları araşdırılmışdır. Qarşıya qoyulan məsələnin verbal qoyuluşu verilmişdir.

Qərar qəbuletmə informasiyaya əsaslanır. İnformasiyanın faydalı olması üçün o etibarlı olmalıdır. Əsasən, Z -ədədlər anlayışı informasiyanın etibarlılığı ilə bağlıdır. Z-ədədin iki komponenti var $Z = (A, B)$. Birinci komponent A həqiqi qiymətli qeyri-müəyyən X

dəyişənin qiymətinə qoyulan məhdudiyyətdir. İkinci komponent B birinci komponentin qiymətinə əminlik (yəqinlik) ölçüsüdür. A və B çox vaxt təbii dil vasitəsilə ifadə edilir. Z-ədədlər anlayışının bir çox tətbiqləri var, xüsusilə iqtisadiyyat, qərarların analizi, riskin qiymətləndirilməsi, proqnozlaşdırma, dürüst olmayan funksiya və münasibətlərin produksiya qaydalarına əsaslanan xarakteristikalarının təyinində geniş tətbiq edilə bilər.

Gerçək aləmdə qeyri-müəyyənlik geniş yayılmış hadisədir. Qərar qəbuletmənin əsaslandığı informasiyanın əksəriyyəti qeyri-müəyyəndir. İnsanların diqqətəlayiq qabiliyyətlərindən biri qeyri-müəyyən, qeyri-dəqiq və natamam informasiya əsasında rasional qərar qəbil edə bilməsidir. Bu qabiliyyətin heç olmasa müəyyən dərəcədə formalizasiyası az rastlaşılan yanaşmadır. Məhz bu yanaşma dissertasiya işinin əsas anlayış və ideyalarının əsasını təşkil edir.

$R(X): X$ is A məhdudiyyəti mümkünlük məhdudiyyəti kimi başa düşülür, burada A X-in mümkünlük paylanması rolunu oynayır. Daha konkret desək,

$$R(X): X \text{is } A \rightarrow Poss(X = u) = \mu_A(u)$$

kimi yazıla bilər. Burada μ_A ilə A-nın mənsubluq funksiyası, u isə X-in ümumi qiymətidir. μ_A-yə $R(X)$ ilə şərtlənən məhdudiyyət kimi baxıla bilər. $\mu_A(u)$ mənaca u-nun məhdudiyyət şərtini ödəməsi dərəcəsini ifadə edir[1].

X təsadüfi dəyişən olduqda X-in ehtimal paylanması X üzərində ehtimal məhdudiyyəti rolunu oynayır. Ehtimal məhdudiyyəti aşağıdakı kimi, ifadə olunur:

$$R(X): X\ isp\ p\ ,$$

burada p X-in ehtimal paylanmasının sıxlıq funksiyasıdır. Bu halda

$$R(X):\ X\ \ isp\ \ p \rightarrow Prob(u \leq X \leq u + du) = p(u)du.$$

Z-qiymətləndirmə (X, A, B) nizamlı üçlüyü vasitəsilə ifadə edilir. Z-qiymətləndirmə X is (A, B) operatoruna ekvivalentdir. Əgər A sinqlton deyilsə, onda X qeyri-müəyyən dəyişəndir. Uyğun yolla,

[1] Rafik A. Aliev, Rashad R. Aliyev, Oleg H. Huseynov, Akif V. Alizadeh, The Arithmetic of Z-Numbers, Theory and Applications, Word Scientific Publishing, 2015 İSBN 978981-4675-28-4, 2015, 316, https://www.worldcat.org/title/arithmetic-of-z-numbers-theory-and-applications/oclc/907652071

qeyri-müəyyənlik hesablamaları hesablamaların elə sistemidir ki, burada hesablama obyektləri dəyişənlərin qiymətləri deyil, dəyişənlərin qiymətlərinə qoyulan məhdudiyyətlərdir. Dissertasiyada xüsusi qeyd edilmədikdə X təsadüfi dəyişən hesab edilir. Sadəlik üçün, X -in qiyməti A-dır dedikdə belə, X -in qiymətinin A-ya bərabər olması deyil X -in ala biləcəyi qiymətlərin A ilə məhdudlaşdırılması başa düşülür. İkinci komponent əminliyi ifadə edir. Əminlik ilə sıx bağlı olan anlayışlar olaraq B yəqinlik, etibarlılıq, inam dərəcəsi, ehtimal, mümkünlük və s. Göstərmək olar. X təsadüfi dəyişən olduqda əminlik ehtimalla eyniləşdirilir.

Əgər X təsadüfi dəyişən olsa, onda X is A həqiqi ədəd oxunda qeyri-səlis hadisədir. Bu hadisənin P ehtimalı aşağıdakı kimi ifadə edilə bilər:

$$P = \int_R \mu_A(u) p_X(u) du,$$

burada X təsadüfi dəyişəninin p_X ehtimal sıxlıq funksiyası qeyri-aşkar şəkildə verilib. Əslində, (X, A, B) Z-qiymətləndirməsi X üzərinə qoyulan

Prob(X is A) is B

şəklindəki ümumiləşdirilmiş məhdudiyyətdir.

Xüsusi vurğulamaq lazımdır ki, Z-ədədi (A, B) nizamlı cütü şəklində təsvirində gizli p_X ehtimal paylanması məlum deyil. Məlum olan p_X üzərinə qoyulan məhdudiyyətdir. Bu məhdudiyyət aşağıdakı kimi ifadə edilir:

$$\int_R \mu_A(u) p_X(u) du \ \ is \ \ B.$$

İkinci fəsildə ("Z-ədədlər və Z-çoxluqlar üzərində əməllər") Z-ədədlər üzərində əməllər haqqında ilkin məlumatlar, təsadüfi-ədədlər üzərində əməllər haqqında ilkin məlumatlar, kəsilməz Z-ədədlər üzərində L.Zadə üsulu ilə əməllər və bu üsulun çətinlikləri göstərilmişdir. Diskret Z-ədədlər üzərində əməllər, Z-ədədlər üzərində əməllərin yerinə yetirilməsi zamanı diskret Z-ədədlər üzərində əməllərin vacibliyi əsaslandırılmışdır.

Kəsilməz Z-ədədlər üzərində hesab əməlləri[2, 3].

Fərz edək ki, $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ həqiqi qiymətli təsadüfi X_1 və X_2 dəyişənləri haqqında qeyri-mükəmməl informasiyanın Z-ədədlər vasitəsilə təsviridir. $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ cəminin hesablanmasına baxaq. Qeyd edildiyi kimi Z-ədədlər üzərində bu əməlin yerinə yetirilməsi uyğun Z^+-ədədlər üzərində müvafiq əməlin yerinə yetirilməsi ilə başlayır. $Z_{12}^+ = Z_1^+ + Z_2^+$ cəminin Z^+-ədədlə ifadə edilən nəticəsi aşağıdakı kimi təyin edilir:

$Z_1^+ + Z_2^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$.

Ümumiyyətlə, biz R_1 və R_2 olaraq ehtimal paylanmalarının geniş sinfini əhatə edirik. İzahatın sadəliyi üçün fərz edək ki, ehtimal normal paylanmışdır, yəni

$$p_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1^2)}{2\sigma_1^2}}, \qquad (1)$$

$$p_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} e^{-\frac{(x_2 - \mu_2^2)}{2\sigma_2^2}}. \qquad (2)$$

Qeyri-səlis ədədlərin $A_1 + A_2$ cəmi qeyri-səlis hesabın düsturları vasitəsilə hesablanır. $R_1 + R_2$ isə kəsilməz ehtimal sıxlıq funksiyalarının $p_{12} = p_1 \circ_+ p_2$ bağlaması olaraq (3)-ə əsasən təyin edilir. Nəticədə aşağıdakı ifadə alınır [4] :

$$p_{12}(x_{12}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left[-\frac{(x_{12} - (\mu_1 + \mu_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right]. \qquad (3)$$

Bunları nəzərə alsaq Z_{12}^+-ni $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, p_{12})$ şəklində alırıq ki, bu da Z-ədədlər üzərində cəmin hesablanmasının ilk addımı olan müvafiq Z^+ hesablamadır.

Növbəti mərhələdə nəzərə alırıq ki, $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ Z-ədədlər verildikdə əslində "gerçək" p_1 və p_2 ehtimal

---

[2] Rafik A. Aliev, Rashad R. Aliyev, Oleg H. Huseynov, A.V. Alizadeh, The Arithmetic of Z-Numbers, Theory and Applications, Word Scientific Publishing, 2015 İSBN 978981-4675-28-4, 2015

[3] A.V. Alizadeh, Rashad R. Aliev, Rafig R. Aliyev. Operational approach to z-information-based decision making, ICAFS-2012, Tenth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Lisbon, Portugal, August 29-30, 2012, 269-277.

[4] http://thirteen-01.stat.iastate.edu/wiki/stat430/files?filename=Ch-2.2-trivedi.pdf

paylamaları dəqiq olaraq məlum olmur. Əksinə, mövcud məlumatlar qeyri-səlis məhdudiyyətlər şəklində təsvir olunur:

$$\int_{\mathcal{R}} \mu_{A_1}(x_1) p_{R_1}(x_1)\ dx_1\ is\ B_1, \tag{4}$$

$$\int_{\mathcal{R}} \mu_{A_2}(x_2) p_{R_2}(x_2) dx_2\ \ is\ B_2, \tag{5}$$

və mənsubiyyət funksiyaları vasitəsilə aşağıdakı kimi ifadə edilir:

$$\mu_{B_1}\left(\int_{\mathcal{R}} \mu_{A_1}(x_1) p_{R_1}(x_1) dx_1\right)\ , \tag{6}$$

$$\mu_{B_2}\left(\int_{\mathcal{R}} \mu_{A_2}(x_2) p_{R_2}(x_2) dx_2\right)\ . \tag{7}$$

Bu məhdudiyyətlər, p_1 və p_2 ehtimal paylanmalarının müvafiq qeyri-səlis çoxluqlara mənsubluq dərəcəsini göstərir və aşağıdakı kimi ifadə edilir:

$$\mu_{p_{R_1}}(p_{R_1}) = \mu_{B_1}\left(\int_{\mathcal{R}} \mu_{A_1}(x_1) p_{R_1}(x_1) dx_1\right) \tag{6a}$$

$$\mu_{p_{R_2}}(p_{R_2}) = \mu_{B_2}\left(\int_{\mathcal{R}} \mu_{A_2}(x_2) p_{R_2}(x_2) dx_2\right). \tag{7a}$$

Beləliklə, $B_j, j = 1,2$ qeyri-səlis ədədlər olub A_j -in ehtimal ölçülərinə qoyulan yumşaq məhdudiyyət rolunu oynayır. Burada (6)-(7)-nin diskretləşdirilmiş versiyasından istifadə edəcəyik. Onda diskretləşdirilmiş $B_j, j = 1,2$ qeyri-səlis ədədlərinin $b_{jl} \in \mathrm{supp}(B_j)$, $j = 1,2;\ l = 1, \ldots, m$ təməl qiymətləri A_j -in ehtimal ölçülərinin müvafiq qiymətləridir, yəni $b_{jl} = P(A_j)$. Beləliklə, verilən b_{jl} üçün elə p_{jl} ehtimal paylanmaları tapırıq ki, aşağıdakı bərabərlik ödənilsin:

$$b_{jl} = \mu_{A_j}(x_{j1}) p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2}) p_{jl}(x_{j2}) + \ldots + \mu_{A_j}(x_{jn_j}) p_{jl}(x_{jn_j}).$$

Eyni zamanda nəzərə alırıq ki, p_{jl}-lər aşağıdakı şərti ödəməlidirlər:

$$\sum_{k=1}^{n_j} p_{jl}(x_{jk}) = 1, p_{jl}(x_{jk}) \geq 0.$$

Ona görə də p_j-i tapmaq üçün aşağıdakı məqsəd proqramlaşdırma məsələsi həll edilməlidir:

$$\mu_{A_j}(x_{j1}) p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j1}) p_{jl}(x_{j1}) + \ldots + \mu_{A_j}(x_{jn_j}) p_{jl}(x_{jn_j}) \to b_{jl} \tag{8}$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} p_{jl}(x_{j1}) + p_{jl}(x_{j2}) + \ldots + p_{jl}(x_{jn}) = 1 \\ p_{jl}(x_{j1}), p_{jl}(x_{j2}), \ldots, p_{jl}(x_{jn}) \geq 0 \end{array}\right\}. \tag{9}$$

İndi, $c_k = \mu_{A_j}(x_{jk})$ və $v_k = p_j(x_{jk}), k = 1, .., n$ işarə edək. c_k və b_{jl} məlum ədədlər və $v_k$isə naməlum qərar dəyişəni olduğundan (8)-

(9) məsələsi aşağıdakı məqsəd proqramlaşdırma məsələsindən başqa bir şey deyildir:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n \to b_{jl} \qquad (8a)$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 1 \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \geq 0 \end{array}\right\}. \qquad (9a)$$

(8a)-(9a) məsələsinin hər bir $l = 1,\ldots,m$ üçün v_k , $k = 1,\ldots,n$ həllini aldıqdan sonra $v_k = p_{jl}(x_{jk})$, $k = 1,\ldots,n$ olduğunu nəzərə alırıq. Buna görə p_{jl} ehtimal paylanmaları əldə edilir. Verilmiş b_{jl}-ə uyğun p_{jl} tapıldıqdan sonra, arzuolunan mənsubiyyət dərəcəsi $\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j}(b_{jl})$, $j = 1,2$ vasitəsilə təyin edilir, yəni $\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j}\left(\sum_{k=1}^{n_j} \mu_{A_j}(x_{jk})p_{jl}(x_{jk})\right)$ ödənilir. Beləliklə, p_{jl} ehtimal paylanmalarının qeyri-səlis çoxluğunu qurmaq üçün n sayda (17a)-(18a) məqsəd proqramlaşdırma məsələsini həll etmək lazımdır. Normal təsadüfi dəyişənlər üçün 1-ci fəsildə qeyd edilən uyğunluq şərtini nəzərə almaqla baxılan məsələ bir σ dəyişənli optimallaşdırma məsələsinə gətirilir. Bu məsələ isə sadə optimallaşdırma üsulları vasitəsilə həll edilə bilir.

Normal paylanmış p_1 və p_2-nin $p_{jl}(x_{jk})$ ehtimal paylanmalarına uyğun ehtimal ölçülərinin mənsubiyyət dərəcələrini müvafiq qeyri-səlis çoxluqlar əsasında hesablanması əsasında p_{12s}, $s = 1,\ldots,m^2$ bağlamalarının qeyri-səlis çoxluğu aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1,p_2}[\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)] \qquad (10)$$

subject to $p_{12} = p_1 \circ p_2$. (11)

Burada $\wedge$ ilə min operatoru işarə edilib.

Növbəti addımda p_{12} əsasında $A_{12} = A_1 + A_2$-nin $P(A_{12})$ehtimal ölçüsü, yəni $X\ is\ A_{12}$ qeyri-səlis hadisəsinin ehtimal ölçüsü hesablanır:

$$P(A_{12}) = \int_{\mathcal{R}} \mu_{A_{12}}(u)p_{12}(u)du \qquad (12)$$

p_{12} məlum olduqda $P(A_{12})$ üçün $P(A_{12}) = b_{12}$ qəbul edilir. Qeyd edək ki, burada məlum olan yalnız p_{12} üzərinə qoyulan qeyri-səlis məhdudiyyətdir və $\mu_{p_{12}}$ mənsubiyyət funksiyası vasitəsilə verilir. Ona görə də, $P(A_{12})$ mənsubiyyət funksiyası $\mu_{B_{12}}$ olan B_{12} qeyri-səlis çoxluğudur və bu mənsubiyyət funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\mu_{B_{12}}(b_{12s}) = \sup(\mu_{p_{12s}}(p_{12s})) \quad (13)$$

subject to

$$b_{12s} = \int_{\mathcal{R}} \mu_{A_{12}}(x) p_{12s}(x_k) dx. \quad (14)$$

Beləliklə, $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ cəmi $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ kimi təyin edilir.

Kəsilməz Z-ədədlər üzərində digər əməllər toplama əməlinə analoji qaydada yerinə yetirilir.

Diskret Z-ədədlər üzərində əməllər[5].

Diskret Z-ədədlərin toplanması. Fərz edək ki, $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ diskret Z-ədədləri həqiqi-qiymətli X_1 və X_2 qeyri-müəyyən dəyişənlərinin qiyməti haqqında dürüst olmayan informasiyanı təsvir edir. $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ cəminin hesablanmasına baxaq. Diskret Z ədədləri üzərində hesablama, kəsilməz Z-ədədlərdə olduğu kimi, müvafiq diskret Z^+-ədədlər üzərində hesablamadan başlayır. diskret Z^+-ədədlərin cəmi $Z_{12}^+ = Z_1^+ + Z_2^+$ aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$Z_1^+ + Z_2^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2),$$

burada R_1 və R_2 diskret ehtimal paylanmaları vasitəsi ilə ifadə edilir:

$p_1 = p_1(x_{11})\backslash x_{11} + p_1(x_{12})\backslash x_{12} + \ldots + p_1(x_{1n})\backslash x_{1n},$

$p_2 = p_2(x_{21})\backslash x_{21} + p_2(x_{22})\backslash x_{22} + \ldots + p_2(x_{2n})\backslash x_{2n}.$

Belə ki, aşağıdakı məhdudiyyət ödənilməlidir:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} p_1(x_{1k}) = 1, \quad (15)$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} p_2(x_{2k}) = 1. \quad (16)$$

$A_1 + A_2$ və $R_1 + R_2$ ifadələrində operandlar müxtəlif tipli məhdudiyyətlərlə ifadə olunduğundan +un mənaları da fərqli olur[6] .

---

[5] Rafik A. Aliev, A.V. Alizadeh, Oleg H. Huseynov. The arithmetic of discrete Z-numbers. Information Sciences https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.08.024, January 2015, Volume 290, 1, 134-155

[6] Zadeh, L. A. (2010). A note on Z-numbers, *Inform. Sciences,* 181, pp. 2923–2932.

Diskret qeyri-səlis ədədlərin $A_1 + A_2$ cəmi qeyri-səlis ədədlər üzərində cəmin tapılmasına uyğun olaraq müəyyən edilir, $R_1 + R_2$ cəmi isə ehtimal paylanmalarının bağlamasının tapılmasına uyğun olaraq müəyyən edilmiş diskret ehtimal paylanmalarının $p_{12} = p_1 \circ p_2$ çevrilməsidir:

$p_{12}(x) = \sum_{x=x_1+x_2} p_1(x_1)p_2(x_2)$.

Z-ədədlər üzərində hesablamanın birinci addımı olaraq uyğun Z^+-ədədlərinin Z_{12}^+ cəmi $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, p_{12})$ kimi təyin edilir. Növbəti mərhələdə $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ Z ədədlərində p_1 və p_2 "həqiqi" ehtimal paylanmalarının dəqiq məlum olmadığını nəzərə alırıq. Ehtimal paylanmaları haqqında mövcud informasiya qeyri-səlis məhdudiyyətlər şəklində ifadə olunur:

$\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k})p_1(x_{1k})\ \ is\ \ B_1,\ \sum_{k=1}^{n_2} \mu_{A_2}(x_{2k})p_2(x_{2k})\ \ is\ \ B_2.$

Belə ki, mənsubiyyət funksiyaları baxımından aşağıdakı kimi olunur:

$\mu_{B_1}\left(\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k})p_1(x_{1k})\right)$, $\quad \mu_{B_2}\left(\sum_{k=1}^{n_2} \mu_{A_2}(x_{2k})p_2(x_{2k})\right)$.

Bu məhdudiyyətlər o deməkdir ki, p_1 və p_2 ehtimal paylanmalarının qeyri-səlis çoxluğu var və mənsubiyyət funksiyaları aşağıdakı kimi ifadə edilir.

$$\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}\left(\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k})p_1(x_{1k})\right),$$

$$\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}\left(\sum_{k=1}^{n_2} \mu_{A_2}(x_{2k})p_2(x_{2k})\right).$$

Beləliklə, $B_j, j = 1,2$ diskret qeyri-səlis ədədlərdir və A_j-in ehtimal ölçüsünün qiyməti üzərində yumşaq məhdudiyyət rolunu oynayır. Buna görə də diskret qeyri-səlis $B_j, j = 1,2$ ədədinin təməl qiymətlər $b_{jl} \in \mathrm{supp}(B_j),\ j = 1,2;\ l = 1, \dots, m$ ehtimal ölçüsünün qiymətləridir. Beləliklə, verilmiş $b_{jl} = P(A_j)$-ə əsasən, elə p_{jl} ehtimal paylanmasını tapmalıyıq ki, aşağıdakı şərt təmin edilsin:

$b_{jl} = \mu_{A_j}(x_{j1})p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2})p_{jl}(x_{j2}) + \dots + \mu_{A_j}(x_{jn_j})p_{jl}(x_{jn_j}).$

Eyni zamanda, p_{jl} aşağıdakı məhdudiyyəti təmin etməlidir:

$$\sum_{k=1}^{n_j} p_{jl}(x_{jk}) = 1, p_{jl}(x_{jk}) \geq 0.$$

Buna görə də, p_j paylanmasını tapmaq üçün aşağıdakı məqsəd proqramlaşdırma məsələsi həll edilməlidir:

$$\mu_{A_j}(x_{j1})p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j1})p_{jl}(x_{j1}) + \ldots + \mu_{A_j}(x_{jn_j})p_{jl}(x_{jn_j}) \to b_{jl} \quad (17)$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} p_{jl}(x_{j1}) + p_{jl}(x_{j2}) + \ldots + p_{jl}(x_{jn}) = 1 \\ p_{jl}(x_{j1}), p_{jl}(x_{j2}), \ldots, p_{jl}(x_{jn}) \geq 0 \end{array}\right\}. \quad (18)$$

$c_k = \mu_{A_j}(x_{jk}))$ və $v_k = p_j(x_{jk}), k = 1,..,n$ işarə edək. Burada c_k və b_{jl} məlum ədədlər, v_k isə naməlum qərar dəyişənləri olduğundan, onların (17)-(18)-dən tapılması aşağıdakı məqsəd xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinə gətirilir:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n \to b_{jl} \quad (17a)$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 1 \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \geq 0 \end{array}\right\}. \quad (18a)$$

Hər $l = 1,\ldots,m$ üçün baxılan məsələsinin $v_k, k = 1,..,n$ həllini aldıqdan sonra $v_k = p_{jl}(x_{jk}), k = 1,..,n$ olduğunu nəzərə alırıq. Nəticədə $p_{jl}(x_{jk}), k = 1,..,n$ tapılır və deməli, p_{jl} ehtimal paylanması alınır. Sonra, b_{jl} verilən p_{jl} ilə əldə edildiyindən, istədiyiniz mənsubiyyət dərəcəsi $\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j}(b_{jl}), j = 1,2,$ olur, bu isə $\mu_{p_{jl}}(p_{jl}) = \mu_{B_j}\left(\sum_{k=1}^{n_j} \mu_{A_j}(x_{jk})p_{jl}(x_{jk})\right)$ deməkdir. Beləliklə, p_{jl} ehtimal paylanmalarının qeyri-səlis toplusunu qurmaq üçün n sadə məqsədli xətti proqramlaşdırma məsələsini həll etməliyik (17a)-(18a).

Beləliklə, p_{jl} ehtimal paylanmalarının qeyri-səlis çoxluğunu qurmaq üçün n sayda sadə məqsəd xətti proqramlaşdırma məsələsini həll etməliyik. p_{1l} və p_{2l} ehtimal paylanmalarının qeyri-səlis çoxluqları p_{12s}, $s = 1,\ldots,m^2$, qeyri-səlis çevrilmə çoxluğunu induksiya edir, mənsubiyyət funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1,p_2}[\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)], \quad (19)$$

subject to

$$p_{12} = p_1 \circ_+ p_2, \quad (20)$$

burada $\wedge$ minimum əməlidir.

Növbəti mərhələdə tapılmış $A_{12} = A_1 + A_2$ cəmi üçün p_{12} ehtimal ölçüsünü hesablayırıq, yəni $X\ is\ A_{12}$ qeyri-səlis hadisəsinin ehtimalını hesablayırıq.

Beləliklə, p_{12} məlum olduqda, $P(A_{12})$ ehtimalı $P(A_{12}) = b_{12}$ ədədidir. Bununla belə, yalnız məlum olan, $\mu_{p_{12}}$ mənsubiyyət funksiyası ilə təsvir edilən p_{12} üzrə qeyri-səlis məhdudiyyətdir. Beləliklə, $P(A_{12})$ aşağıdakı kimi müəyyən edilmiş $\mu_{B_{12}}$ mənsubiyyət funksiyası ilə verilən qeyri-səlis B_{12} çoxluğu olacaq:

$$\mu_{B_{12}}(b_{12s}) = \sup(\mu_{p_{12s}}(p_{12s})) \tag{21}$$

subject to

$$b_{12s} = \textstyle\sum_k p_{12s}(x_k)\mu_{A_{12}}(x_k)\ . \tag{22}$$

Nəticədə, $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ cəmi $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ kimi alınır.

Misal 1. $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ iki diskret Z-ədədin $Z_{12} = Z_1 + Z_2$ cəmini aşağıdakı kimi hesablanır:

$$A_1 = 0/1 + 0.3/2 + 0.5/3 + 0.6/4 + 0.7/5 + 0.8/6 +$$
$$+0.9/7 + 1/8 + 0.8/9 + 0.6/10 + 0/1\,1,$$
$$B_1 = 0/0 + 0.5/0.1 + 0.8/0.2 + 1/0.3 + 0.8/0.4 + 0.7/0.5 +$$
$$+\,0.6/0.6 + 0.4/0.7 + 0.2/0.8 + 0.1/0.6 + 0/1\,;$$
$$A_2 = 0/1 + 0.5/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 + 0.7/6 + 0.6/7 +$$
$$+\,0.4/8 + 0.2/9 + 0.1/10 + 0/1\,1,$$
$$B_2 = 0/0 + 0.3/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.7/0.4 +$$
$$+\,0.8/0.5 + 0.9/0.6 + 1/0.7 + 0.9/0.8 + 0.8/0.6 + 0/1\,.$$

Z_{12} -nin hesablanmasının ilk addımında diskret Z^+ ədədlərə keçirik. Fərz edək ki, $Z_1^+ = (A_1, R_1)$ və $Z_2^+ = (A_2, R_2)$ ədədləri verilib, burada R_1 və R_2 məhdudiyyətləri p_1 və p_2 diskret ehtimal paylamalarıdır:

$$p_1 = 0.27\backslash 1 + 0\backslash 2 + 0\backslash 3 + 0.0027\backslash 4 + 0.04\backslash 5 + 0.075\backslash 6 +$$
$$+0.11\backslash 7 + 0.15\backslash 8 + 0.075\backslash 9 + 0.0027\backslash 10 + 0.27\backslash 11,$$

$$p_2 = 0.09\backslash 1 + 0\backslash 2 + 0.18\backslash 3 + 0.32\backslash 4 + 0.18\backslash 5 + 0.1\backslash 6 +$$
$$+0.036\backslash 7 + 0\backslash 8 + 0\backslash 9 + 0\backslash 10 + 0.09\backslash 11.$$

Yoxlamaq olar ki, (15)-(16) məhdudiyyətləri ödənir. İkinci mərhələdə biz $Z_{12}^+ = (A_1 + A_2, R_1 + R_2)$ diskret Z^+ ədədini təyin edilməlidir. Burada, əvvəlcə $A_{12} = A_1 + A_2$ hesablanır:

$$A_{12} = \textstyle\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_{12}^{\alpha},$$

burada $A_{12}^{\alpha} = \{x \in \{\text{supp}\ (A_1) + \text{supp}\ (A_2)\} | \min\{A_1^{\alpha} + A_2^{\alpha}\} \le x \le \max\{A_1^{\alpha} + A_2^{\alpha}\}\}$. Hesablama sadəliyi üçün $\alpha = 0{,}0.1, \dots ,1$ götrsək nəticədə A_{12} aşağıdakı kimi tapılır.

$$A_{12} = 0/1 + 0/2 + 0.19/3 + 0.36/4 + 0.5/5 + 0.58/6 + 0.65/7 + 0.73/8 + \\ + 0.8/9 + 0.87/10 + 0.93/11 + 1/12 + 0.9/13 + 0.8/14 + 0.73/15 + \\ + 0.7/16 + 0.6/17 + 0.45/18 + 0.3/19 + 0.17/20 + 0.086/21\,.$$

Sonra $R_1 + R_2$-ni baxılan p_1 və p_2-nin $p_{12} = p_1 \circ_{+} p_2$ bağlaması kimi hesablayırıq.

Məsələn, $p_{12}(x)$ ehtimal paylanması $x = 4$ üçün hesablayaq. Aydındır ki, $x = x_{11} + x_{23} = 1 + 3 = 4$, $x = x_{13} + x_{21} = 3 + 1 = 4$ və ya $x = x_{12} + x_{22} = 2 + 2 = 4$ halları ola bilər. Onda

$$p_{12}(4) = p_1(1)p_2(3) + p_1(3)p_2(1) + p_1(2)p_2(2) =$$

$$= 0.27 \cdot 0.18 + 0 \cdot 0.09 + 0 \cdot 0 = 0.0486.$$

Analoji qaydada digər təməl nöqtələrdə də ehtimallar hesablanır və hesablanan ehtimal paylanması p_{12} aşağıdakı kimi olar:

$$p_{12} = 0\backslash 1 + 0.0243\backslash 2 + 0\backslash 3 + 0.0486\backslash 4 + \dots + 0.007\backslash 19 + \\ + 0.0002\backslash 20 + 0.0243\backslash 21.$$

Beləliklə, $Z_{12}^{+} = (A_1 + A_2, R_1 + R_2) = (A_1 + A_2, p_{12})$ alınır.

Üçüncü addımda nəzərə alırıq ki, p_1 və p_2 "həqiqi" ehtimal paylamaları dəqiq məlum deyil, lakin yalnız p_1 və p_2 üçün müvafiq olaraq B_1 və B_2 vasitəsi ilə induksiya olunan qeyri-səlis məhdudiyyətlər μ_{p_1} və μ_{p_2} mövcuddur. (17a)-(18a) məqsəd xətti proqramlaşdırma məsələlərinin həlli olaraq verilmiş qeyri-səlis məhdudiyyətlərin $\mu_{p_j}(p_j)$, $j = 1{,}2$ mənsubiyyət dərəcələrini hesablayırıq. Yuxarıda nəzərdən keçirilən p_1 və p_2 paylanmaları üçün $\mu_{p_1}(p_1)$ və $\mu_{p_2}(p_2)$ mənsubiyyət dərəcələrinin təyin edilməsini nəzərdən keçirək. Məlumdur ki, yuxarıda nəzərdən keçirilən p_1-ə nəzərən $\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}\left(\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k}) p_1(x_{1k})\right)$ aşağıdakı kimi tapılır:

$$\sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_1}(x_{1k}) p_1(x_{1k}) = 0 \cdot 0.27 + 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.6 \cdot 0.003 + \\ + 0.7 \cdot 0.04 + 0.8 \cdot 0.075 + 0.9 \cdot 0.11 + 1 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 0.075 + \\ + 0.6 \cdot 0.002 + 0 \cdot 0.27 = 0.4,$$

onda $\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}(0.4) \ = 0.8$. Analoji qaydada, yuxarıda baxılan p_2 üçün $\mu_{p_2}(p_2) = 1$ tapılır. Nəhayət, p_1 və p_2 -yə uyğun bütün mənsubiyyət dərəcələri hesablanır.

Dördüncü addımda, bütün nəzərdən keçirilən p_1 və p_2 -dən hesablama əsasında alınan bütün p_{12} bağlamaları üzərində qeyri-səlis məhdudiyyət $\mu_{p_{12}}$ (19)-(20)-ə əsasən müəyyən edilməlidir. Aydındır ki, qeyri-səlis məhdudiyyət $\mu_{p_{12}}$ qeyri-səlis məhdudiyyətlər μ_{p_1} və μ_{p_2} ilə induksiya olunur. Məsələn, yuxarıda əldə edilən p_{12} bağlaması üçün bu qeyri-səlis məhdudiyyətin mənsubluq dərəcəsi aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2) = 0.8 \wedge 1 = 0.8.$$

Analoji olaraq, bütün nəzərə alınan p_{12} üçün dərəcələr hesablanır. Beşinci addımda (21)-(22)-ə əsasən $P(A_{12})$ ehtimal ölçüsünün yumşaq məhdudiyyət kimi B_{12} -nin qurulmalıdır. Əvvəlcə $P(A_{12})$ ehtimal ölçüsünün qiymətlərini aldığımız p_{12} bağlamasından istifadə edərək hesablayırıq. Məsələn, yuxarıda nəzərdən keçirilən p_{12} ilə bağlı hesablanmış $P(A_{12})$ aşağıdakı kimi olar:

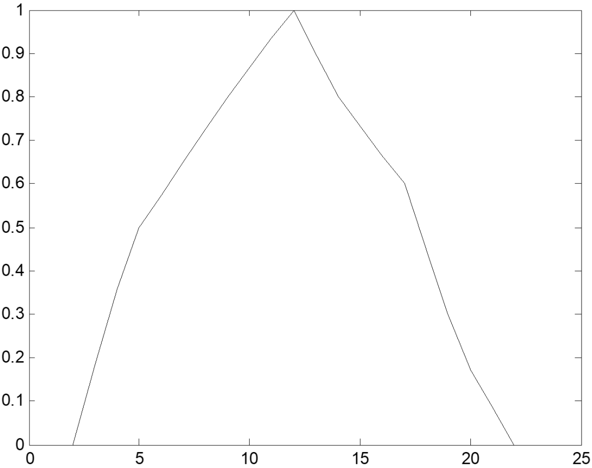
$$P(A_{12}) = \sum_{k=1}^{n_1} \mu_{A_{12}}(x_{12k}) p_{12}(x_{12k}) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0.243 + 0.19 \cdot 0 +$$
$$+0.36 \cdot 0.0486 + 0.087 \cdot 0.5 + \ldots + 0.086 \cdot 0.243 = 0.63.$$

Hesablanmış $P(A_{12})$ qurulacaq B_{12} qeyri-səlis məhdudiyyət daxilində ehtimal ölçüsünün mümkün qiyməti olduğundan, hesab edə bilərik ki, B_{12} -nin bir təməl qiyməti $b_{12} = 0.63$ kimi tapılır. $\mu_{B_{12}}\left(b_{12} = \sum_k \mu_{A_{12}}(x_{12k}) p_{12}(x_{12k})\right) = \mu_{p_{12}}(p_{12})$ olduğunu nəzərə alırıq, $\mu_{p_{12}}(p_{12}) = 0.8$ verildikdə, $b_{12} = \sum_k \mu_{A_{12}}(x_{12k}) p_{12}(x_{12k})$ üçün $\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.63) = 0.8$ alırıq.

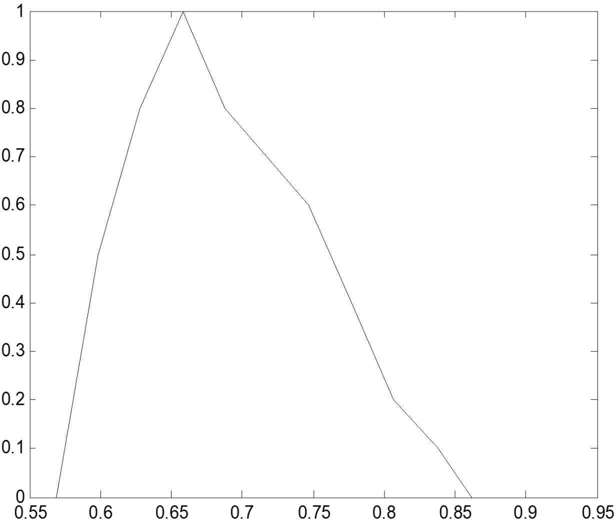
Analoji hesablamalar apararaq B_{12}-ni aşağıdakı kimi qururuq:

$$B_{12} = 0/0.56 + 0.5/0.60 + 0.8/0.63 + 1/0.66 + 0.8/0.69 + 0.7/0.72 +$$
$$+ 0.6/0.75 + 0.4/0.78 + 0.2/0.81 + 0.1/0.84 + 0/0.86 + 0/1.$$

Beləliklə, $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ cəmi tapılır, burada A_{12}, B_{12} Şəkil -də göstərilmişdir.



(a)



(b)

Şəkil 1. Diskret Z ədədlərinin toplanmasının nəticələri: (a) A_{12}, (b) B_{12}

Diskret Z ədədlər üzərində vurma əməli [7]**.** $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ Z-ədədlərinin $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$ hasilinin tapılmasını nəzərdən keçirək. Əvvəlcə $Z_{12}^+ = Z_1^+ \cdot Z_2^+$ müəyyən edilməlidir:

$$Z_1^+ \cdot Z_2^+ = (A_1 \cdot A_2, R_1 \cdot R_2),$$

burada R_1 və R_2 diskret ehtimal paylanmaları vasitəsi ilə təsvir edilir:

$$p_1 = p_1(x_{11})\backslash x_{11} + p_1(x_{12})\backslash x_{12} + \ldots + p_1(x_{1n})\backslash x_{1n},$$

$$p_2 = p_2(x_{21})\backslash x_{21} + p_2(x_{22})\backslash x_{22} + \ldots + p_2(x_{2n})\backslash x_{2n},$$

belə ki, ehtimal paylanmaları (15)-(16) məhdudiyyət şərtlərini ödəyir. $A_1 \cdot A_2$ qeyri-səlis ədədlərin vurulması qaydası ilə hesablanır. $R_1 \cdot R_2$ isə diskret ehtimal paylanmalarının $p_{12} = p_1 \circ_* p_2$ bağlaması kimi təyin edilir:

$$p_{12}(x) = \sum_{x = x_1 \cdot x_2} p_1(x_1) p_2(x_{2j}).$$

Beləliklə, $Z_{12}^+ = (A_1 \cdot A_2, p_{12})$ hesablanar. Bundan sonra, toplama əməlində təsvir edilən prosedura analoji olaraq, (19)-(20)-ə əsasən $\mu_{p_{jl}}(p_{jl})$, $l = 1, \ldots, m$ qeyri-səlis çoxluqları və ehtimal paylanmalarının p_{12s}, $s = 1, \ldots, m^2$ bağlamalarının müvafiq mənsubiyyət dərəcələri vasitəsi ilə qeyri-səlis çoxluqlarını qururuq.

Növbəti mərhələdə $A_{12} = A_1 \cdot A_2$ ehtimal ölçüsü hesablanır. Nəhayət, toplama əməlinə analoji olaraq (21)-(22)-ə əsasən qeyri-səlis çoxluğu B_{12} qurulur. Nəticədə $Z_{12} = Z_1 \cdot Z_2$ hasili $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ kimi alınır.

Misal 2. Toplamada nəzərdən keçirilən Z-ədədlərinin vurulmasını nəzərdən keçirək. Yenə də əvvəlcə diskret Z^+ ədədinə keçirik. İkinci addımda, hesablamalıyıq $Z_{12}^+ = (A_{12}, R_{12}) = (A_1 \cdot A_2, R_1 \cdot R_2)$. Yuxarıda təsvir olunan yanaşmaya uyğun olaraq, $A_{12} = A_1 \cdot A_2$ qeyri-səlis ədədlərin vurulması qaydası əsasında və $R_1 \cdot R_2$-ni isə p_1 və p_2 ehtimal paylanmalarının bağlaması kimi hesablayırıq. Toplama və çıxma üçün istifadə edilmiş prosedurlara bənzər şəkildə əldə edilmiş nəticələr aşağıda göstərilir:

$$A_{12} = 0/1 + 0.16/2 + \ldots + 1/32 + \ldots + 0.17/100 + 0/121.$$

[7] A.V. Alizadeh, Rashad R. Aliev, Oleg H.Huseynov. Numerical computations with discrete z-numbers, ICSCCW-2013, Seventh International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control, Izmir, Turkey, September 2-3, 2013, 71-82

$$p_{12} = 0.243\backslash 1 + 0\backslash 2 + \ldots + 0\backslash 100 + 0.243\backslash 121.$$

Nəticədə $Z_{12}^{+} = (A_1 \cdot A_2, p_{12})$ alınır.

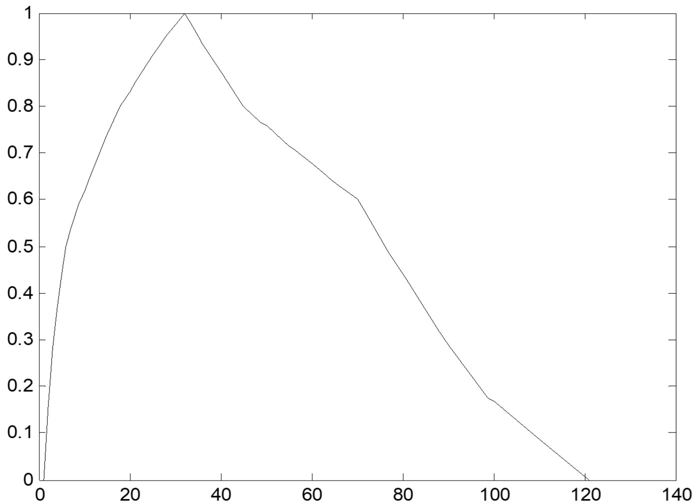
Üçüncü addımda, $\mu_{p_1}(p_1)$ və $\mu_{p_2}(p_2)$ üzvlük dərəcələrini hesablayırıq. Dördüncü mərhələdə, p_{12} bağlamalarının mənsubluq dərəcələri toplama əməlinə analoji olaraq $\mu_{p_1}(p_1)$ və $\mu_{p_2}(p_2)$ əsasında alınır.

Beşinci addımda, B_{12} hesablayırıq. Bu məqsədlə əldə edilmiş p_{12} bağlamalarına müvafiq $P(A_{12})$ ehtimal ölçüsünün qiymətlərini hesablayırıq. Məsələn, yuxarıda nəzərdən keçirilən p_{12} üçün hesablanmış $P(A_{12})$ ehtimal ölçüsü $P(A_{12}) = b_{12} = 0.67$ olur.

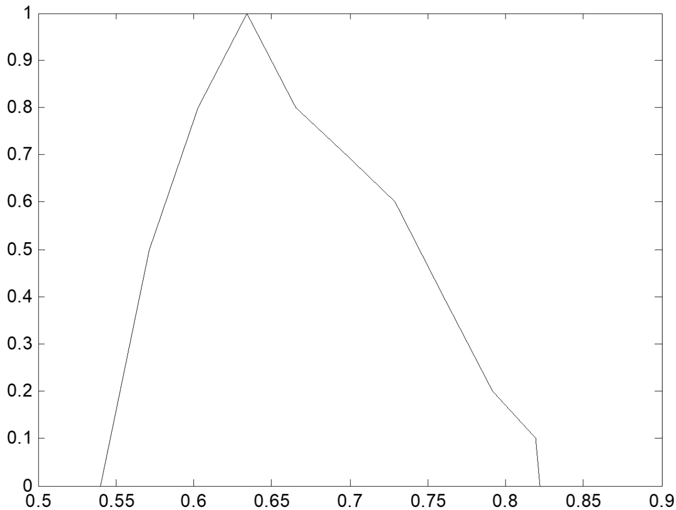
Son mərhələdə (21)-(22)-ə əsasən B_{12} qururuq. Məsələn, $\mu_{B_{12}}(b_{12} = 0.67) = 0.8$. Digər təməl nöqtələrdə də müvafiq dərəcələri hesablamaqla qurulmuş B_{12} aşağıda verilmişdir:

$$B_{12} = 0/0.54 + 0.5/0.57 + 0.8/0.61 + 1/0.63 + 0.8/0.67 +$$
$$+ 0.7/0.7 + 0.6/0.73 + 0.4/0.76 + 0.2/0.79 + 0.1/0.819 + 0/0.82.$$

Beləliklə, vurma nəticəsində $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ alınır və Şəkil 2-də A_{12}, B_{12} göstərilib.



(a)



(b)

Şəkil 2. Diskret Z ədədlərinin vurulmasının nəticələri:(a) A_{12}, (b) B_{12}

Diskret Z ədədinin kvadrat kökü. $Z_Y = \sqrt{Z_X}$ hesablanmasını nəzərdən keçirək. Z_X^+ və Z_X əvvəlki misaldakının eyni olsun. Sonra $Z_Y^+ = (A_Y, R_Y)$ diskret Z^+-ədədi aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$Z_Y^+ = (A_Y, R_Y).$$

$A_Y = \sqrt{A_X}$ və $\sqrt{A_X}$ qeyri-səlis ədədlərin kvadrat kökünün hesablaması qaydası əsasında müəyyən edilir. R_Y diskret ehtimal paylanması ilə təsvir edilir:

$$p_{R_Y} = p_{R_Y}(y_1)\backslash y_1 + p_{R_Y}(y_2)\backslash y_2 + \ldots + p_{R_Y}(y_n)\backslash y_n,$$

belə ki, $y_k = \sqrt{x_k}$ və $p_{R_Y}(y_k) = p_{R_X}(x_k)$.

Sonra $\mu_{p_X}(p_{X,l}) = \mu_{B_X}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{A_X}(x_k) p_{X,l}(x_k)\right)$ qururuq. Bu halda tələb olunan məhdudiyyət şərtləri daxilində $\mu_{p_Y}(p_{Y,l}) = \mu_{p_X}(p_{X,l})$.

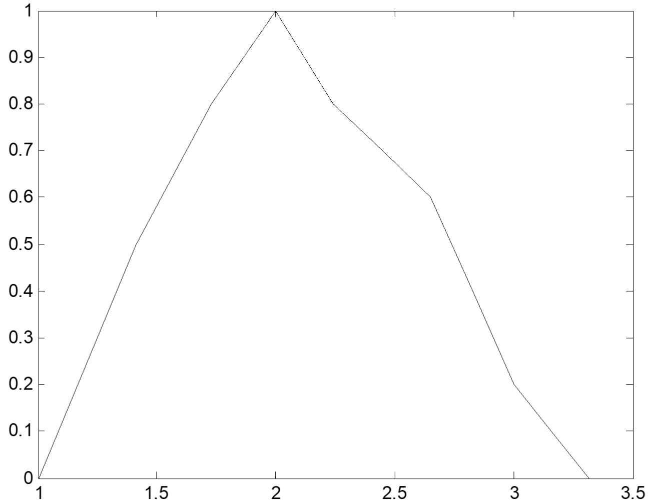
Sonra A_Y-nin ehtimal ölçüsünü hesablayırıq və μ_{p_Y} mənsubiyyət funksiyasını nəzərə alaraq B_Y qeyri-səlis çoxluğu baxdığımız əməllərə analoji şəkildə qururuq. Nəticədə $\sqrt{Z}$ kvartan kökünü $\sqrt{Z} = (A_Y, B_Y)$ kimi alınır. Diskret Z ədədinin kvadrat kökü üçün $B_Y = B_X$ olmalıdır.

Misal 3. Vurma əməlində nəzərdən keçirilən $Z_2 = (A_2, B_2)$ Z-ədədinin kvadrat kökünün $Z_3 = \sqrt{Z_2}$ hesablanmasına baxaq. Yuxarıdakı misalda istifadə edilən $Z_2^+ = (A_2, R_2)$ Z^+-ədədi nəzərə alınmaqla, müvafiq $Z_3^+ = (A_3, R_3)$ Z^+-ədədi hesablanır, burada $A_3 = \sqrt{A_2}$ qeyri-səlis ədədin kvadrat kökünün hesablanması qaydası əsasında hesablanır, R_3 isə ehtimal paylanması vasitəsi ilə təsvir edilir. Hesablamanın nəticəsi aşağıda verilmişdir:

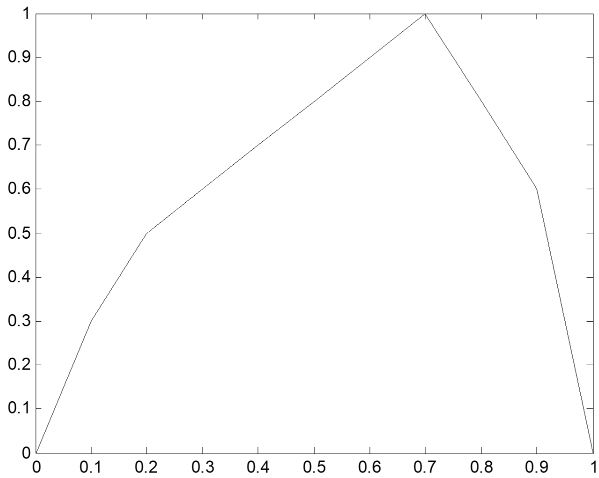
$$A_3 = 0/1 + 0.5/1.4 + 0.8/1.7 + 1/2 + 0.8/2.2 + 0.7/2.4 + 0.6/2.6 + \\ + 0.4/2.8 + 0.2/3 + 0.1/3.2 + 0/3.3,$$

$$p_3 = 0.09\backslash 1 + 0\backslash 1.4 + 0\backslash 1.7 + 0.32\backslash 2 + 0.18\backslash 2.2 + 0.1\backslash 2.4 + \\ +0.036\backslash 2.6 + 0\backslash 2.8 + 0.2\backslash 3 + 0.1\backslash 3.2 + 0.09\backslash 3.3.$$

Yuxarıda göstərildiyi kimi, $B_3 = B_2$. Beləliklə, Z_2-nin kvadrat kökü kimi $Z_3 = (A_3, B_3)$ Z-ədədi alınır və şəkil 3-də A_3, B_3 göstərilib.



(a)



(b)

Şəkil 3. Diskret Z-ədədinin kvadrat kökü:(a) A_3, (b) B_3

Göründüyü kimi, $B_3 = B_2$ olur.

Diskret Z ədədlərinin minimum və maksimumu [8]. Fərz edək ki, $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ həqiqi qiymətli təsadüfi X_1 və X_2 dəyişənləri haqqında qeyri-mükəmməl informasiyanın diskret Z-ədədlər vasitəsilə təsviridir. Verilmiş bu Z -ədədlərin $Z_{12} = MIN(Z_1, Z_2)$ minimumunun hesablanması məsələsinə baxaq. $Z_{12} = MAX(Z_1, Z_2)$ hesablanması analoji qaydada aparılır.

Qeyd edək ki, diskret Z -ədədlər üzərində əməllərin yerinə yetirilməsi kəsilməz Z -ədədlər üzərində əməllərin yerinə yetirilməsində olduğu kimi uyğun Z^+ -ədədlər üzərində müvafiq əməlin yerinə yetirilməsi ilə başlayır. $Z_{12}^+ = \min(Z_1^+, Z_2^+)$ əməlinin Z^+-ədədlə ifadə edilən nəticəsi aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\min(Z_1^+, Z_2^+) = (MIN(A_1, A_2), \min(R_1, R_2)).$$

[8] A.V. Alizadeh, Oleg H. Huseynov Minimum and maximum of discrete z-numbers, Eleventh International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS – 2014, Paris, France, September 2-3, 2014, 205-218.

Burada R_1 və R_2 diskret

$p_1 = p_1(x_{11})\backslash x_{11} + p_1(x_{12})\backslash x_{12} + \ldots + p_1(x_{1n})\backslash x_{1n}$,

$p_2 = p_2(x_{21})\backslash x_{21} + p_2(x_{22})\backslash x_{22} + \ldots + p_2(x_{2n})\backslash x_{2n}$,

ehtimal paylanmaları vasitəsilə təsvir edilir və bu paylamalar üçün aşağıdakı şərtlər ödənir:

$$\sum_{k=1}^{n} p_1(x_{1k}) = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} p_2(x_{2k}) = 1.$$

$MIN(A_1, A_2)$ və $\min(R_1, R_2)$ əməllərindəki operandalar müxtəlif tip məhdudiyyətlər olduğundan MIN və min müxtəlif məna daşıyır[9]. Diskret qeyri-səlis ədədlərin $MIN(A_1, A_2)$ minimumu təyin edilir. $\mathrm{Min}(R_1, R_2)$ isə diskret p_1, p_2 ehtimal paylanmalarının verilən $p_{12} = p_1 \circ_{\min} p_2$ bağlaması vasitəsilə ifadə edilir.

Z_1 və Z_2 -nin maksimum halında $Z_{12} = MAX(Z_1, Z_2)$ hesablanarkən diskret qeyri-səlis ədədlərin MIN-u həmin ədədlərin MAX-u ilə, ehtimal paylanmaları üzərindəki min əməli isə uyğun olaraq verilən max əməli ilə əvəz edilməlidir.

Beləliklə, biz diskret Z-ədədlər üzərində əməlin ilk addımı olaraq Z^+ -ədədlərin Z_{12}^+ minimumu olaraq $Z_{12}^+ = (MIN(A_1, A_2), p_{12})$ -ni hesablamalıyıq.

Növbəti mərhələdə nəzərə alırıq ki, $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ diskret Z -ədədlər verildikdə əslində "gerçək" p_1 və p_2 ehtimal paylamaları dəqiq olaraq məlum olmur, mövcud məlumatlar qeyri-səlis məhdudiyyətlər şəklində ifadə olunur:

$\mu_{B_1}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{A_1}(x_{1k}) p_1(x_{1k})\right)$, $\mu_{B_2}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{A_2}(x_{2k}) p_2(x_{2k})\right)$.

Bu məhdudiyyətlər p_1 və p_2 ehtimal paylanmalarının mənsubiyyət dərəcələri aşağıda verilən qeyri-səlis çoxluğunu doğurur:

$\mu_{p_1}(p_1) = \mu_{B_1}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{A_1}(x_{1k}) p_1(x_{1k})\right)$,

$\mu_{p_2}(p_2) = \mu_{B_2}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_{A_2}(x_{2k}) p_2(x_{2k})\right)$.

$B_j, j = 1,2$ qeyri-səlis ədədlərinin $b_{jl} \in \mathrm{supp}(B_j), j = 1,2;\ l = 1, \ldots, m$ təməl qiymətləri A_j -in ehtimal ölçülərinin müvafiq

---

[9] Zadeh, L. A. (2010). A note on Z-numbers, *Inform. Sciences,* 181, pp. 2923–2932.

qiymətləridir, yəni $b_{jl} = P(A_j)$. Beləliklə, verilən b_{jl} üçün elə p_{jl} ehtimal paylanmaları tapırıq ki, aşağıdakı bərabərlik ödənilsin:

$$b_{jl} = \mu_{A_j}(x_{j1})p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j2})p_{jl}(x_{j2}) + \ldots + \mu_{A_j}(x_{jn_j})p_{jl}(x_{jn_j}).$$

Eyni zamanda nəzərə alırıq ki, p_{jl}-lər aşağıdakı şərti ödəməlidirlər:

$$\sum_{k=1}^{n_j} p_{jl}(x_{jk}) = 1, p_{jl}(x_{jk}) \geq 0.$$

Ona görə də p_j-i tapmaq üçün aşağıdakı məqsəd proqramlaşdırma məsələsi həll edilməlidir:

$$\mu_{A_j}(x_{j1})p_{jl}(x_{j1}) + \mu_{A_j}(x_{j1})p_{jl}(x_{j1}) + \ldots + \mu_{A_j}(x_{jn_j})p_{jl}(x_{jn_j}) \to b_{jl}$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} p_{jl}(x_{j1}) + p_{jl}(x_{j2}) + \ldots + p_{jl}(x_{jn}) = 1 \\ p_{jl}(x_{j1}), p_{jl}(x_{j2}), \ldots, p_{jl}(x_{jn}) \geq 0 \end{array}\right\}.$$

p_{1l} və p_{2l} ehtimal paylanmalarının qeyri-səlis çoxluğu bu paylanmaların p_{12s}, $s = 1, \ldots, m^2$ bağlamalarının mənsubiyyət funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilən qeyri-səlis çoxluğunu doğurur:

$$\mu_{p_{12}}(p_{12}) = \max_{p_1, p_2}[\mu_{p_1}(p_1) \wedge \mu_{p_2}(p_2)]$$

subject to

$$p_{12} = p_1 \circ_{\min} p_2,$$

burada $\wedge$ ilə min operatoru işarə edilib.

Növbəti addımda p_{12} əsasında $A_{12} = MIN(A_1, A_2)$ -nin $P(A_{12})$ ehtimal ölçüsü, yəni $X\ is\ A_{12}$ qeyri-səlis hadisəsinin ehtimal ölçüsü hesablanır:

$$P(A_{12}) = \sum_{x_k} p_{12}(x_k)\mu_{A_{12}}(x_k).$$

p_{12} məlum olduqda $P(A_{12})$ üçün $P(A_{12}) = b_{12}$ qəbul edilir. Qeyd edək ki, burada məlum olan yalnız p_{12} üzərinə qoyulan qeyri-səlis məhdudiyyətdir və $\mu_{p_{12}}$ mənsubiyyət dərəcələri vasitəsilə verilir. Ona görə də, $P(A_{12})$ mənsubiyyət dərəcələri $\mu_{B_{12}}$ olan B_{12} diskret qeyri-səlis çoxluğudur və bu mənsubiyyət dərəcələri aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\mu_{B_{12}}(b_{12s}) = \sup(\mu_{p_{12s}}(p_{12s}))$$

subject to

$$b_{12s} = \sum_k p_{12s}(x_k)\mu_{A_{12}}(x_k).$$

Hesablamanın nəticəsi olaraq, $Z_{12} = MIN(Z_1, Z_2)$ minimumu $Z_{12} = (A_{12}, B_{12})$ kimi tapılır.

Z-çoxluqlar və onlar üzərində əməllər.

Z-çoxluqlar üzərində qoşulma (join) və qovuşuq (meet) əməlləri, Z-çoxluqlar üzərində nəzəri çoxluq əməlləri: tamamlama, kəsişmə, birləşmə əməlləri təyin edilmiş və hesablama qaydaları verilmişdir. Bu əməllərin ödədiyi qaydalar sübuta yetirilmiş və misallar üzərində izah edilmişdir.

Tərif 1. Z-çoxluq $Z = (A, B, G)$ üçlüyü kimi təsvir edilir, burada A qeyri-səlis çoxluq, B qeyri-səlis çoxluğu G-ehtimal paylamaları çoxluğu vasitəsilə qurulan $P(A)$ ehtimal ölçüsü üzərində qeyri-səlis məhdudiyyətdir, belə ki,

$G = \{p_Z(x): \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(x)dx = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(x)\mu_A(x) \ \ is \ \ B, \int_{-\infty}^{+\infty} xp_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mu_A(x)dx \, / \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x)dx\}.$

$Z_i = (A_i, B_i, G_i)$ Z- çoxluq üzərində üç əsas əməliyyatı nəzərdən keçiririk.

Tamamlama. Fərz edək ki, $Z = (A, B, G)$ verilən Z-çoxluqdur, belə ki, burada G elementləri ehtimal paylamaları olan çoxluqdur:

$G = \{p_Z(x): \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(x)dx = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(x)\mu_A(x) \ \ is \ \ B, \int_{-\infty}^{+\infty} xp_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mu_A(x)dx \, / \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x)dx\}.$

$Z = (A, B, G)$ Z-çoxluğunun $\bar{Z}$ tamamlaması aşağıdakı kimi təyin edilir.

$\bar{Z}$ tamamlaması üçün $\bar{G}$ ehtimal paylanmaları çoxluğu aşağıdakı kimi təyin edilir:

$\overline{G} = \{p_Z(x): \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(x)dx = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(x)\mu_A(x) \ \ is \ \ B, \int_{-\infty}^{+\infty} xp_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mu_A(x)dx \, / \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x)dx\}.$

Onda

$\bar{Z} = (\overline{A}, 1 - B, G)$,

olar, belə ki, $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ və $1 - B$ isə hesabi fərq kimi başa düşülür.

Z-çoxluqların qoşulması (Join). $Z_i = (A_i, B_i, G_i)$, $i = 1,2$ Z-çoxluqların qoşulması aşağıdakı kimi təyin edilir[10]:

$Z_{12} = Z_1 \sqcup Z_2 = \max(Z_1, Z_2) = (A_{12}, B_{12})$.

Əvvəlcə kəsilməz Z-çoxluqlar halına baxaq.

Verilmiş iki qeyri-səlis ədədin $A_{12} = MAX(A_1, A_2)$ maksimumu aşağıdakı kimi təyin edilir:

$A_{12}(z) = MAX(A_1, A_2)(z) = \sup_{z=\max(x,y)} \min\,[A_1(x), A_2(y)]$.

Qoşulmanın p_{12} ehtimal paylanmalarının G_{12} çoxluğu aşağıdakı kimi təyin edilir:

$G_{12} = G_1 \sqcup G_2$,

burada

$G_i = \{p_{Z_i}(x): \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Z_i}(x)dx = 1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Z_i}(x)\mu_{\mathrm{A}_i}(x)\ \ is\ \ B_i,$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x p_{Z_i}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mu_{\mathrm{A}_i}(x)dx \,/\, \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\mathrm{A}_i}(x))dx\}$.

Ehtimal paylanmalarının $p_{12} = p_1 \circ_{\max} p_2$ aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$p_{12}(x) = p_1(x)F_1(x) + p_2(x)F_2(x)$$

burada F_1 və F_2 inteqral paylanma funksiyalarıdır:

$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(x)dx$,

$F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} p_2(x)dx$.

Onda $Z_{12} = (A_{12}, B_{12}, G_{12})$ olar, belə ki,

---

[10] A.V. Alizadeh, Properties of Join and Meet Operations over Z-numbers, 14th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing – ICAFS-2020, Montenegro, Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham. Online ISBN978-3-030-64058-3, Print ISBN978-3-030-64057-6, eBook Packages Intelligent Technologies and RoboticsIntelligent Technologies and Robotics (R0), 2020, vol 1306, 580-589, https://www.springer.com/gp/book/9783030640576, https://doi.org/10.1007/978-3-030-64058-3_72

$G_{12} = \{p_{12}(x) : p_{12}(x) = p_1(x)F_1(x) + p_2(x)F_2(x), p_i(x) \in G_i\}$,

$B_{12} = \{(\mu_{p_{12}}(p_{12}), \mu_{A_{12}} \cdot p_{12}) : p_{12} \in G_{12}\}$.

Z-çoxluqların qovuşuğu (Meet). $Z_i = (A_i, B_i, G_i)$, $i = 1,2$ Z-çoxluqların qovuşuğu aşağıdakı kimi təyin edilir:

$Z_{12} = Z_1 \sqcap Z_2 = \min(Z_1, Z_2) = (A_{12}, B_{12}, G_{12})$.

Qeyri-səlis ədədlərin minimumu $MIN(A_1, A_2)$ aşağıdakı kimi təyin edilir:

$A_{12}(z) = MIN(A_1, A_2)(z) = \sup\limits_{z=\min(x,y)} \min\,[A_1(x), A_2(y)]$.

Nəticənin p_{12} ehtimal paylanmalarının G_{12} çoxluğu aşağıdakı kimi təyin olunar:

$$G_{12} = G_1 \sqcap G_2,$$

burada

$G_i = \left\{p_{Z_i}(x) : \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Z_i}(x)dx = 1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Z_i}(x)\mu_{A_i}(x)\ \ is\ \ B_i,\right.$

$\left.\int_{-\infty}^{+\infty} x p_{Z_i}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mu_{A_i}(x)dx \,/ \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{A_i}(x))dx\right\}$.

Verilən ehtimal paylanmalarının $p_{12} = p_1 \circ_{\min} p_2$ bağlaması aşağıdakı kimi təyin olunar:

$p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_1(x)F_1(x) - p_2(x)F_2(x)$,

burada F_1 və F_2 uyğun inteqral ehtimal paylanma funksiyalarıdır:

$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(x)dx,\ F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} p_2(x)dx$.

Onda

$G_{12} = \{p_{12}(x) : p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_1(x)F_1(x) -$

$p_2(x)F_2(x), p_i(x) \in G_i\}$

kimi qurular.

Beləliklə,

$B_{12} = \{(\mu_{p_{12}}(p_{12}), \mu_{A_{12}} \cdot p_{12}) : p_{12} \in G_{12}\}$

alarıq.

Z-çoxluqların birləşməsi [11].

$Z_i = (A_i, B_i, G_i)$, $i = 1,2$ Z - çoxluqların birləşməsi

$Z_{12} = Z_1 \cup Z_2 = Zor(Z_1, Z_2) = (A_{12}, B_{12}, G_{12})$

kimi işarə edilir və aşağıdakı kimi təyin edilir:

A_1 və A_2 qeyri-səlis çoxluqlarının $A_{12} = A_1 \cup A_2$ birləşməsi aşağıdakı kimi təyin edilir:

$A_{12}(x) = (A_1 \cup A_2)(x) = \max(A_1(x), A_2(x))$.

p_{12} ehtimal paylanmalarının G_{12} çoxluğunu $G_{12} = G_1 \cup G_2$ işarə edək, burada $i = 1,2$ üçün

$$G_i = \left\{p_{Z_i}(x): \int_X p_{Z_i}(x)dx = 1, \int_X p_{Z_i}(x)A_i(x)dx \;\; is \;\; B_i, x \in X\right\}$$

kimi təyin edilir.

Ehtimal paylanmalarının $p_{12} = p_{Z_1 \cup Z_2}(x) = p_{Z_1}(x) \circ_{\cup} p_{Z_2}(x) = p_1 \circ_{\cup} p_2$ bağlaması

$$p_{12}(x) = p_{Z_1 \cup Z_2}(x) = \frac{(p_{Z_1}(x)+p_{Z_2}(x)-p_{Z_1}(x)p_{Z_2}(x))p_X(x)}{\int_X (p_{Z_1}(x)+p_{Z_2}(x)-p_{Z_1}(x)p_{Z_2}(x))p_X(x)dx}$$

kimi təyin edilir. Burada $p_X(x) = \frac{1}{card(X)}$.

Onda $Z_{12} = (A_{12}, B_{12}, G_{12})$, belə ki G_{12} və B_{12} aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$G_{12}=\{p_{12}(x): p_{12}(x) = p_{Z_1 \cup Z_2}(x) =$$

$$= \frac{(p_{Z_1}(x)+p_{Z_2}(x)-p_{Z_1}(x)p_{Z_2}(x))p_X(x)}{\int_X (p_{Z_1}(x)+p_{Z_2}(x)-p_{Z_1}(x)p_{Z_2}(x))p_X(x)dx}, p_i(x) \in G_i, x \in X\},$$

Beləliklə,

$B_{12} = \{(\mu_{p_{12}}(p_{12}), \mu_{A_{12}} \cdot p_{12}): p_{12} \in G_{12}\}$.

Z-çoxluqların kəsişməsi.

$Z_i = (A_i, B_i, G_i)$, $i = 1,2$ Z - çoxluqlarının kəsişməsi

$Z_{12} = Z_1 \cap Z_2 = Zand(Z_1, Z_2) = (A_{12}, B_{12}, G_{12})$

---

[11] A.V. Alizadeh, Properties of Set-Theoretical Operations over Z-Sets, Advances in Intelligent Systems and Computing Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-35249-3_84, 2019, vol 1095, 654-661, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-35249-3_84

kimi işarə edilir və aşağıdakı kimi təyin edilir:

A_1 və A_2 qeyri-səlis çoxluqlarının $A_1 \cap A_2$ kəsişməsi aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$A_{12}(x) = (A_1 \cap A_2)(x) = \min(A_1(x), A_2(x)).$$

Verilən Z-çoxluqların kəsişmənə müvafiq p_{12} ehtimal paylanmaları G_{12} çoxluğu $G_{12} = G_1 \cap G_2$, kimi işarə edilir.

Burada G_i çoxluqları ()-da olduğu kimi təyin edilib.

Ehtimal paylanmalarının

$$p_{12} = p_{Z_1 \cap Z_2}(x) = p_{Z_1}(x) \circ_\cap p_{Z_2}(x) = p_1 \circ_\cap p_2$$

bağlaması aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$p_{12}(x) = p_{Z_1 \cap Z_2}(x) = \frac{p_{Z_1}(x) p_{Z_2}(x) p_X(x)}{\int_X p_{Z_1}(x) p_{Z_2}(x) p_X(x) dx},$$

burada $p_X(x) = \frac{1}{card(X)}$.

Onda $Z_{12} = (A_{12}, B_{12}, G_{12})$, belə ki

$$G_{12} = \{p_{12}(x): p_{12}(x) = p_{Z_1 \cap Z_2}(x) =$$

$$= \frac{p_{Z_1}(x) p_{Z_2}(x) p_X(x)}{\int_X p_{Z_1}(x) p_{Z_2}(x) p_X(x) dx}, p_i(x) \in G_i, \;\; x \in X\}.$$

Beləliklə,

$$B_{12} = \{(\mu_{p_{12}}(p_{12}), \mu_{A_{12}} \cdot p_{12}): p_{12} \in G_{12}\}.$$

Üçüncü fəsil (“Qərar qəbuletmədə Z-xətti proqramlaşdırmanın tətbiqi”) Z-ədəd qiymətli xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllini əhatə edir. Xətti proqramlaşdırma elm, iqtisadiyyat, biznes, idarəetmə və mühəndislik sahələrində tez-tez istifadə olunan əməliyyatların tədqiqi üsuludur. Mühəndis-tədqiqatçılar tərəfindən altmış ildən çox bir müddətdə modelin parametrləri haqqında informasiyanın ümumiləşdirilməsinin müxtəlif səviyyələri ilə, o cümlədən interval, qeyri-səlis, ümumiləşmiş qeyri-səlis, təsadüfi ədədlər əsasında müxtəlif tip xətti proqramlaşdırma üsulları tədqiq və tətbiq olunmasına baxmayaraq təəssüf ki, hələ də xətti proqramlaşdırmada informasiyanın əminlik dərəcəsini nəzərə alan üsul yoxdur. Z-qiymətli qərar dəyişənləri və Z-qiymətli parametrlərlə biz Z-qiymətləndirməyə əsaslanan xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll prosesinə baxacağıq.

Z-informasiya əsasında xətti proqramlaşdırma məsələsinin ümumi qoyuluşu aşağıdakı kimi ifadə olunur[12]:

$$Z_f(Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}) = Z_{c_1}Z_{x_1} + Z_{c_2}Z_{x_2} + \dots + Z_{c_n}Z_{x_n} \to \max \quad (23)$$

subject to

$$\begin{aligned} &Z_{a_{11}}Z_{x_1} + Z_{a_{12}}Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{1n}}Z_{x_n} \preceq Z_{b_1}, \\ &Z_{a_{21}}Z_{x_1} + Z_{a_{22}}Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{2n}}Z_{x_n} \preceq Z_{b_2}, \\ &\dots \\ &Z_{a_{m1}}Z_{x_1} + Z_{a_{m2}}Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{mn}}Z_{x_n} \preceq Z_{b_m}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n} \succeq Z_0 \quad (25)$$

Z-qiymətli qərar dəyişənləri və Z-qiymətli parametrlərlə biz Z-qiymətləndirməyə əsaslanan xətti proqramlaşdırma məsələsinin həll prosesinə baxacağıq.

Z-informasiya əsasında xətti proqramlaşdırma məsələsinin ümumi qoyuluşu aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$Z_f(Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}) = Z_{c_1}Z_{x_1} + Z_{c_2}Z_{x_2} + \dots + Z_{c_n}Z_{x_n} \to \min \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &Z_{a_{11}}Z_{x_1} + Z_{a_{12}}Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{1n}}Z_{x_n} \preceq Z_{b_1}, \\ &Z_{a_{21}}Z_{x_1} + Z_{a_{22}}Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{2n}}Z_{x_n} \preceq Z_{b_2}, \\ &\dots \\ &Z_{a_{m1}}Z_{x_1} + Z_{a_{m2}}Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{mn}}Z_{x_n} \preceq Z_{b_m}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n} \succeq 0^Z. \quad (28)$$

Z-bərabərsizliklər (26)-(27) ifadələrinə uyğun olaraq aşağıda göstərilmiş məsələyə çevrilə bilər:

$$Z_f(Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}) = Z_{c_1}Z_{x_1} + Z_{c_2}Z_{x_2} + \dots + Z_{c_n}Z_{x_n} \to \min \quad (29)$$

Məhdudiyyət şərtləri

[12] Aliev, R. A., Alizadeh, A. V., Huseynov, O. H., Jabbarova, K.I. Z-number based Linear Programming. *Int. J. Intell. Syst.*

$$
\begin{aligned}
&Z_{a_{11}}Z_{x_1}+Z_{a_{12}}Z_{x_2}+\ldots+Z_{a_{1n}}Z_{x_n}\leq Z_{b_1},\\
&Z_{a_{21}}Z_{x_1}+Z_{a_{22}}Z_{x_2}+\ldots+Z_{a_{2n}}Z_{x_n}\leq Z_{b_2},\\
&\ldots\\
&Z_{a_{m1}}Z_{x_1}+Z_{a_{m2}}Z_{x_2}+\ldots+Z_{a_{mn}}Z_{x_n}\leq Z_{b_m},
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$$Z_{x_1}, Z_{x_2}, \ldots, Z_{x_n} \geq 0^Z. \tag{31}$$

Burada qərar dəyişənləri və parametrləri Z-ədədlərlə ifadə olunur:

$$
\begin{aligned}
&Z_{x_i} = (\tilde{A}_{x_i}, \tilde{B}_{x_i}),\\
&Z_{c_i} = (\tilde{A}_{c_i}, \tilde{B}_{c_i}),\\
&Z_{a_{ij}} = (\tilde{A}_{a_{ij}}, \tilde{B}_{a_{ij}}),\\
&Z_{b_j} = (\tilde{A}_{b_j}, \tilde{B}_{b_j}),\\
&i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Məsələnin həll. Z-qiymətləndirməyə əsaslanan xətti proqramlaşdırma məsələsini mahiyyətcə başa düşmək üçün maksimum Z_f və Z ilə ifadə edilən bərabərsizliklərin mənasını aydınlaşdırmalıyıq. Z_f-in optimal (max və ya min) qiymətini təyin edə bilən bir üsula elmi ədəbiyyatda rast gəlinmir. Ona görə də biz (23)-(25) Z-LP məsələsini həll etmək üçün Diferensial Təkamül Optimallaşdırma (DTO) üsulu adlandırılan və birbaşa axtarış üsulundan istifadə edirik.

Tərif 2. Z-qiymətləndirməyə əsaslanan fiktiv (slack) dəyişən. Fərz edək ki, i-ci məhdudiyyət Z-qiymətləndirməyə əsaslanan xətti proqramlaşdırma məsələsində

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{a_{ij}} Z_{x_j} \leq Z_{b_i},$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{a_{ij}} Z_{x_j} + Z_{x_{n+i}} = Z_{b_i},$$

əgər $Z_{x_{n+i}} \geq 0^Z$ olarsa, onda Z-qiymətləndirməyə əsaslanan $Z_{x_{n+i}}$ dəyişəni Z - qiymətli fiktiv dəyişən adlanır.

Tərif 3. Z-qiymətləndirməyə əsaslanan izafi (surplus) dəyişəni. Fərz edək ki, i-ci məhdudiyyət Z-qiymətləndirməyə əsaslanan xətti proqramlaşdırma məsələsində

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{a_{ij}} Z_{x_j} \geq Z_{b_i}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{a_{ij}} Z_{x_j} - Z_{x_{n+i}} = Z_{b_i}, \quad Z_{x_{n+i}} \geq 0^Z$$

olarsa, Z-qiymətləndirməyə əsaslanan $Z_{x_{n+i}}$ dəyişəni Z qiymətli izafi, qalıq (gecikmə) dəyişəni (surplus) adlanır.

Tərif 4. Z-qiymətli mümkün həll. (23)-də istənilən Z_x (23)-(25) şərtlərini ödəyirsə, bu (23)-(25)-ün Z-qiymətli mümkün həlli adlanır.

Tərif 5. Z-qiymətli optimal həll. Fərz edək ki, Z_s Z-qiymətləndirməyə əsaslanan (23)-(25)-ün mümkün həllər çoxluğudur. Əgər $Z_f(Z_{X_0}) \leq^Z Z_f(Z_X)$ (24)-(25) şərtlərini ödəyirsə, $Z_{X_0} \in Z_s$ Z-qiymətli mümkün həll (23)-(25)-ün Z-qiymətli optimal həlli adlanır.

Əvvəlcə biz Z-qiymətli fiktiv dəyişənləri əlavə edirik.

$$Z_f(Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}) = Z_{c_1} Z_{x_1} + Z_{c_2} Z_{x_2} + \dots + Z_{c_n} Z_{x_n} \rightarrow \min$$

Məhdudiyyət şərtləri

$$Z_{a_{11}} Z_{x_1} + Z_{a_{12}} Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{1n}} Z_{x_n} + Z_{x_{n+1}} = Z_{b_1},$$
$$Z_{a_{21}} Z_{x_1} + Z_{a_{22}} Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{2n}} Z_{x_n} + Z_{x_{n+2}} = Z_{b_2},$$
$$\dots$$
$$Z_{a_{m1}} Z_{x_1} + Z_{a_{m2}} Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{mn}} Z_{x_n} + Z_{x_{n+m}} = Z_{b_m},$$

$$Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}, Z_{x_{n+1}}, Z_{x_{n+2}}, \dots, Z_{x_{n+m}} \geq 0^Z.$$

Sonra biz baxılan məsələni uyğun ekvivalent formada yenidən yazırıq:

$$Z_g(Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}, Z_{x_{n+1}}, Z_{x_{n+2}}, \dots, Z_{x_{n+m}}) = Z_{c_1} Z_{x_1} + Z_{c_2} Z_{x_2} + \dots + Z_{c_n} Z_{x_n} +$$
$$+(Z_{b_1} - (Z_{a_{11}} Z_{x_1} + Z_{a_{12}} Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{1n}} Z_{x_n} + Z_{x_{n+1}})) +$$
$$+(Z_{b_2} - (Z_{a_{21}} Z_{x_1} + Z_{a_{22}} Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{2n}} Z_{x_n} + Z_{x_{n+2}})) +$$
$$\dots$$
$$+(Z_{b_m} - (Z_{a_{m1}} Z_{x_1} + Z_{a_{m2}} Z_{x_2} + \dots + Z_{a_{mn}} Z_{x_n} + Z_{x_{n+m}})) \rightarrow \min$$

Məhdudiyyət şərtləri

$$Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}, Z_{x_{n+1}}, Z_{x_{n+2}}, \dots, Z_{x_{n+m}} \geq 0^Z$$

Bu optimallaşdırma məsələsini həll etmək üçün biz beşinci bölmədə verilmiş Diferensial Təkamül Optimallaşdırma alqoritmindən istifadə edirik.

Həll üsulu. Optimallaşdırma məsələsini həll etmək üçün, əvvəl bütün Z_X qərar dəyişənləri [-1, 1] intervalında, təsadüfi qiymətlər generasiya edilərək, ilkin qiymətləndirilir. Optimallaşdırmaya başlamaq üçün, əvvəl Diferensial Təkamül Optimallaşdırmanın

(DEO) parametrlərini təyin edirik, Diferensial Təkamül Optimallaşdırmanın (DEO) Z_f məqsəd funksiyası olaraq

$$Z_g\left(Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}, Z_{x_{n+1}}, Z_{x_{n+2}}, \dots, Z_{x_{n+m}}\right)$$

təyin edirik və populyasiya ölçüsünü seçirik. (bir qayda olaraq optimallaşdırma parametrlərindən 10 dəfə artıq olur, yəni 10*Npar). Sonra Diferensial Təkamül Optimallaşdırma prosesi başlayır.

Əvvəlcə qərar dəyişənlərini (Z_x) bilmək üçün ölçmənin (Npar) şablon parametrlərini (Z_{xs}) təyin edirik.

Sonra alqoritmin parametrlərini təyin etməliyik: mutasiya normasını (F), Calama normasını (CR) və populyasiya ölçüsünü (PN).

Biz yararlılıq funksiyasını məqsəd funksiyası kimi hesablayırıq.

Təsadüfi olaraq PN parametr vektorlarını generasiya edirik (məsələn, uyğun parametrlər fəzasından [-1, 1]) və populyasiya yaradırıq:

$$P=\{Z_{X_1}, Z_{X_2}, \dots, Z_{X_{ps}}\}.$$

Sonda nəticə (ya təyin olunmuş generasiyaların sayı alınmalı ya da ki tələb olunan xəta səviyyəsi əldə olunmalıdır) gözlədiyimiz kimi olmasa yeni parametrlər çoxluğu generasiya olunmalıdır. Biz növbəti vektoru seçirik:

$$Z_{X_i} \text{ (i=1,...,PopSize).}$$

Sonra $P: Z_{X_{r1}}, Z_{X_{r2}}, Z_{X_{r3}}$ -dən 3 fərqli sınaq vektoru götürürük ki, onların hər biri cari Z_{X_i} vektorundan fərqli olsun. Sınaq vektorunu generasiya edirik:

$$Z_{X_t} = Z_{X_{r1}} + F \cdot (Z_{X_{r2}} - Z_{X_{r3}}).$$

Z_{X_t} sınaq vektorundan yeni vektor generasiya edirik. Z_{X_t}-nin fərdi vektor parametrləri calama normasının ehtimalı ilə birgə Z_{X_i} yeni vektora çevrilir. Əgər $Z_{X_{new}}$ -nun qiymət funksiyası Z_{X_i} -in qiymət funksiyasından daha yaxşı (və ya daha aşağı) olarsa, cari Z_{X_i}, funksiyası $Z_{X_{new}}$-nun P populyasiyası ilə əvəz olunur. Sonra P populyasiyadan biz ən yaxşı $Z_{X_{best}}$ dəyər funksiyası (məqsəd funksiyası) olan parametr vektorunu seçirik. Sonra $Z_{X_{best}}$-dən qərar dəyişənlərinin vektorlarını ayırırıq.

Sonra biz S_t sınaq vektorundan yeni vektor generasiya edirik. S_t-nin fərdi vektor parametrləri calama normasının ehtimalı ilə birgə varis olur və S_{new} vektoruna aid edilir. S_{new}-nun dəyər funksiyası S_i-nin dəyər funksiyasından daha yaxşı(və ya daha aşağı) olarsa, cari S_i S_{new}-nun P populyasiyası ilə əvəz olunur. Sonra P populyasiyadan biz yüksək dəyər funksiyası (Z_f) olan .S_{best}. parametr vektorunu (ən yaxşı qərar dəyişənlərini) seçirik. İndi isə biz S_{best} -dən bütün qərar dəyişənlərini ayıra bilərik.

Dördüncü fəsildə ("Faydalılıq funksiyası istifadə edilmədən Z-informasiya mühitində qərar qəbuletmə") faydalılıq funksiyası istifadə edilmədən Z-informasiya mühitində qərar qəbuletmə üsulları verilib.

Qərar qəbuletmə üsulları sahəsində ümumi yanaşma faydalılıq nəzəriyyələrinin tətbiqidir. Faydalılıq nəzəriyyələrinin əsas çatışmazlığı odur ki, bunlar vektor-qiymətli alternativlərin skalyar qiymətli kəmiyyət vasitəsilə qiymətləndirilməsinə əsaslanır. Bu çevrilmə həmişə informasiya itkisinə səbəb olur və intuisiya ilə ziddiyyət təşkil edir. Gerçək həyatda insan düşüncə və ya qərar qəbul etmək üçün atributların müqayisəsi zamanı onların vektorial qiymətlərindən skalyar qiymətlərə keçmir. Vektor vasitəsilə təsvir edilən faydalılıq funksiyasına əsaslanan yanaşmalar mövcud olsa da, fundamental bir aksiomatik nəzəriyyə yoxdur. Digər tərəfdən, insan mühakiməsi kimi üstünlüklər çox vaxt qeyri-müəyyəndir və dəqiq ədədi qiymətlərlə təsvir edilə bilməz. Bununla yanaşı, vektor qiymətli faydalılıq funksiyasına əsaslanan yanaşmalarla bağlı mövcud işlər, real həyatda qərar qəbul edərkən nadir hallarda rast gəlinən qərarla əlaqəli mükəmməl məlumatlarla xarakterizə olunan vəziyyətlərə həsr edilmişdir. Bununla yanaşı, faydalılığa əsaslanan yanaşmalar qeyri-asılılıq və ya onun müxtəlif yüngülləşdirilmiş şərtləri, tamlıq, tranzitivlik, nizam və bu kimi məhdudlaşdırıcı fərziyyələrə əsaslanır. Çox məhdud fərziyyələrə əsaslanan yararlı faydalılıq modeli sadə olsa da, adekvat olmur; daha az məhdudlaşdırıcı fərziyyələrə əsaslanan modellər daha adekvat faydalılıq modeli olsa da daha mürəkkəb hala gətirir. Elə hallar da mövcuddur ki, orada faydalılıq funksiyalarının tətbiq mümkün deyil (məsələn, leksikoqrafik nizam).

Yuxarıda göstərilən hallar, bir tərəfdən, vektor qiymətli alternativlərin birbaşa cüt-cüt müqayisəsinə əsaslanan yeni qərar qəbuletmə yanaşmalarının inkişaf etdirilməsini zəruri edir. Digər tərəfdən, yeni yanaşmalar qeyri-müəyyən vektor alternativlərlə işləmək üçün alternativlərin linqvistik müqayisəsinə əsaslanmalıdır, çünki real həyat alternativləri demək olar ki, həmişə müəyyən bir dərəcədə əhəmiyyətlidir. Üstünlüklərin linqvistik modelləşdirilməsi, alternativlərin Pareto optimal alternativlər çoxluğunu ixtisar etməyə imkan verir və ya bütün müvafiq məlumatlar təbii dildə (NL) izah edildikdə, optimal alternativlərin daralmış bir altçoxluğunu əldə etməyə kömək edir. Bu məqsədlə, mövcud elmi konsepsiyaların Sözlə Hesablama (CW) əsasında yenidən müəyyənləşdirilməsi vasitəsi kimi qeyri-səlis optimallıq konsepsiyasından [13, 14] istifadə edilə bilər.

Tərif 6. (Pareto dominantlıq). Hər iki $f_i, f_k \in A$ nöqtə (namizəd həllər) üçün f_i alternativi f_k-ya nəzərən yalnız və yalnız onda Pareto üstün (P-dominat) hesab edilir ki, aşağıdakı şərtlər ödənsin:

$f_i(s_j) \geq f_k(s_j)$ hər bir $j \in \{1,2,\dots,M\}$ üçün,

$f_i(s_{j'}) > f_k(s_{j'})$ ən azı bir $j' \in \{1,2,\dots,M$ üçün.

Tərif 7. (Pareto Optimallıq). $f^* \in A$ o vaxt Pareto Optimal hesab edilir ki, elə $f_i \in A$ tapmaq mümkün deyil ki, f_i alternativi f^*-a nəzərən P-dominant olsun.

Tərif 8. (Pareto çoxluq və Pareto Front). Layihə oblastı və məqsəd oblastında Pareto optimal həllər çoxluğuna müvafiq olaraq S_P Pareto optimal çoxluq və $\mathcal{F}_P$ Pareto front deyirik.

Məsələnin qoyuluşu. Tutaq ki, $S = \{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_M\} \subset \mathcal{E}^n$ qeyri-səlis təbii vəziyyətlər çoxluğu, $X \subset \mathcal{E}^n$ isə qeyri-səlis nəticələr çoxluğudur. Təbiətdəki qeyri-səlislik, təbii dildə təsvir olunan müvafiq məlumatların qeyri-dəqiqliyi səbəbindən sonuncunun təmiz bölünməsi mümkün olmadıqda obyektiv şərtlərin qeyri-səlis qranulyasiyası üçün istifadə olunur. Alternativlərin A çoxluğu S-dən

[13] Zadeh, L. A. (2006). Generalized theory of uncertainty (GTU)—principal concepts and ideas. *Computational Statistics and Data Analysis*, *51*, 15–46.

[14] Farina,M.,&Amato, P. (2004). A fuzzy definition of ”optimality” for many-criteria optimization problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, *34*(3), 315–326.

X-ə təsir edən qeyri-səlis $\tilde{f}$ funksiyalar çoxluğu kimi başa düşülür [15, 16]. Təbiət vəziyyətlərinin $\tilde{P}^l$ ehtimalları ilə bağlı linqvistik məlumatlar $\tilde{s}_j$ vəziyyətlərin $\tilde{P}_j$ qeyri-səlis ehtimalları vasitəsilə ifadə olunur:

$$\tilde{P}^l = \tilde{P}_1/\tilde{s}_1 + \tilde{P}_2/\tilde{s}_2 + \ldots + \tilde{P}_M/\tilde{s}_M,$$

burada $\tilde{P}_j \in \mathcal{E}^1_{[0,1]}$.

Qeyri-müəyyən alternativlər üzərində qeyri-müəyyən üstünlüklər, A üzərində linqvistik üstünlük münasibəti vasitəsilə modelləşdirilir. Bunun üçün "üstünlük dərəcəsi" linqvistik dəyişəni üçün $T = (T_1, \ldots, T_K)$ term çoxluğunu təyin etmək kifayətdir [17, 18]. Şərtlər, "bərabərlik", "kiçik üstünlük", "yüksək üstünlük" kimi işarələnə bilər və hər biri müəyyən miqyasda məsələn [0,1] və ya [0,10] intervalında təyin edilmiş qeyri-səlis ədədlə təsvir edilə bilər. $\tilde{f}_i$-nın linqvistik baxımından $\tilde{f}_k$-dan üstünlüyü $\tilde{f}_i \gtrsim_l \tilde{f}_k$ kimi yazılır. Bu isə o deməkdir ki, elə $T_i \in A$ linqvistik $Deg(\tilde{f}_i \gtrsim_l \tilde{f}_k)$ dərəcəsi tapmaq olar ki, $\tilde{f}_i$ alternativinin $\tilde{f}_k$-dan üstünlük dərəcəsi $Deg(\tilde{f}_i \gtrsim_l \tilde{f}_k) \approx T_i$ kimi ifadə edilir.

Beləliklə, qeyri-səlis qeyri-mükəmməl məlumatlarla qərar qəbuletmə $(S, \tilde{P}^l, X, A)$ dördlüyü şəklində təsvir olunur. Qərar qəbul etmə məsələsi $\gtrsim_l$ müəyyənləşdirməkdən ibarətdir. Bu isə alternativlərin optimallıq dərəcələri ilə təsvir olunur. $\tilde{f}_i$ alternativin optimallıq dərəcəsi $do(\tilde{f}_i)$ işarələnir və $\tilde{f}_i$ -nin digər bütün alternativlərdən üstünlük təşkil etdiyi ümumi dərəcədir. Qərar qəbul

---

[15] Zadeh, L.A., Aliev, R.A., Fazlollahi, B.,Alizadeh, A.V., Guirimov,B.G.,&Huseynov, O.H. (2009).Decision Theory with Imprecise Probabilities. Contract on "Application of Fuzzy Logic and Soft Computing to communications, planning and management of uncertainty". Technical report, Berkeley, Baku, 95 p. http://www.raliev.com/report.pdf

[16] Aliev, R. A., Alizadeh, A. V., Guirimov, B. G., & Huseynov, O. H. (2010). Precisiated information-based approach to decision making with imperfect information. In *Proceedings of the ninth international conference on application of fuzzy systems and soft computing, 2010*, *ICAFS-2010* (pp. 91–103). Prague, Czech Republic.

[17] Borisov, A. N., Alekseyev, A. V., Merkuryeva, G. V., Slyadz, N. N., & Gluschkov, V. I. (1989). Fuzzy information processing in decision making systems. Moscow: Radio i Svyaz (in Russian).

[18] Liu, W. J., & Zeng, L. (2008). A new TOPSIS method for fuzzy multiple attribute group decision making problem. *Journal of Guilin University of Electronic Technology*, *28*(1), 59–62.

etmə məsələsi, $do(\tilde{f}^*) = \max_{\tilde{f}_i \in A} do(\tilde{f}_i)$ optimallıq dərəcəsinə malik $\tilde{f}^* \in A$ optimal alternativin müəyyənləşdirilməsindən ibarətdir.

Həll üsulu. [19]-da təklif olunan qeyri-səlis Pareto optimallıq (FPO) formalizmi mükəmməl məlumat strukturu üçün işlənmişdir, yəni qərar qəbuletmə ilə bağlı bütün məlumatlar dəqiq ədədi qiymətləndirmələrlə ifadə olunduğu hal üçün yararlıdır. Digər tərəfdən, bu yanaşma çoxatributlu qərar qəbul etmək üçün təklif edilmişdir. Dürüst olmayan məlumatlar əsasında qərar qəbul etmə üçün qeyri-səlis Pareto optimallıq formalizmini genişləndiririk. Həll üsulu aşağıda təsvir edilmişdir.

Baxılan məsələnin həlli, vektorla təsvir edilən $\tilde{f}_i$ və $\tilde{f}_k$ alternativlərinin birbaşa müqayisə üçün bütün $\tilde{f}_i, \tilde{f}_k \in A$ üçün $\tilde{f}_i$-nin $\tilde{f}_k$ -dan linqvistik üstünlük dərəcəsinin müəyyənləşdirilməsindən ibarətdir.

Birinci mərhələdə $\tilde{P}_j$ qeyri-səlis ehtimallarının qiyməti təbiətin hər qeyri-səlis $\tilde{s}_j$ vəziyyəti üçün təyin edilməlidir. Bununla yanaşı, yalnız birindən başqa bütün qeyri-səlis vəziyyətlər üçün qeyri-səlis ehtimallarla ifadə olunan qismən məlumat verilə bilər. Naməlum qeyri-səlis ehtimal təyin edilə bilməz, lakin məlum qeyri-səlis ehtimallara əsasən hesablanmalıdır. Bilinməyən qeyri-səlis ehtimalın hesablanması mənsubiyyət funksiyasının qurulmasını tələb etdiyi üçün optimallaşdırma məsələsidir. Naməlum qeyri-səlis $\tilde{P}(\tilde{S}_j) = \tilde{P}_j$ ehtimalının hesablanması məsələsi [20]-də təklif edilən qaydaya uyğun olaraq aşağıdakı kimi qurulur:

$$\mu_{\tilde{P}_j}(p_j) = \sup_\rho \min_{j\prime=\{1,\dots,j-1,j+1,\dots,n\}} (\mu_{\tilde{P}_{j\prime}}(\int_S \mu_{\tilde{s}_{j\prime}}(s)\rho(s)ds))$$

$$\int_S \mu_{\tilde{s}_j}(s)\rho(s)ds = p_j, \int_S \rho(s)ds = 1.$$

---

[19] Farina,M.,&Amato, P. (2004). A fuzzy definition of ”optimality” for many-criteria optimization problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, *34*(3), 315–326.

[20] Zadeh, L. A. (2006). Generalized theory of uncertainty (GTU)—principal concepts and ideas. *Computational Statistics and Data Analysis*, *51*, 15–46.

Burada $\mu_{\tilde{s}_j}(s)$ qeyri-səlis $\tilde{s}_j$ vəziyyətinin mənsubiyyət funksiyasıdır. Beləliklə, $\tilde{s}_j$ vəziyyəti üçün $\tilde{P}_j$ bilinməyən ehtimal yalnız digər təbiət vəziyyətləri üçün verilən ehtimallar əsasında deyil, həm də $\tilde{s}_j$ vəziyyətinin özü haqqında qüsurlu məlumatlar əsasında qurulur. $\tilde{P}_j$ tapıldıqdan sonra, bütün $\tilde{s}_j$ vəziyyətinin üçün linqvistik $\tilde{P}^l$ ehtimal paylanması müəyyən edilir:

$$\tilde{P}^l = \tilde{P}_1/\tilde{s}_1 + \tilde{P}_2/\tilde{s}_2 + \ldots + \tilde{P}_M/\tilde{s}_M.$$

$\tilde{P}^l$ -ni hesablanması zamanı meydana çıxan vacib problem, uyarlılıq, tamlıq və izafiliyin yoxlanılmasıdır. İkinci mərhələdə, təbiətin bütün $\tilde{s}_j$ qeyri-səlis halları üzərində uyarlı, tam və qeyri-izafi qeyri-səlis ehtimalların paylanması nəzərə alınmaqla, hər səlisin qeyri-səlis ehtimalını nəzərə alaraq bütün vəziyyətlər üzrə $\tilde{f}_i$-nin $\tilde{f}_k$-ya nəzərən üstünlüyünün, ekvivalentliyinin və zəifliyinin ümumi dərəcələrini müəyyən etmək lazımdır.

$\tilde{f}_i$-nin $\tilde{f}_k$-ya nəzərən üstünlüyünün, ekvivalentliyinin və zəifliyinin müvafiq ümumi nbF, neF və nwF dərəcələri, təbiətin hər qeyri-səlis vəziyyəti üçün $\tilde{f}_i$ və $\tilde{f}_k$ -nın qeyri-səlis nəticələri arasındakı fərqlər əsasında aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) = \sum_{j=1}^{M} \mu_b^j \left(gmv((\tilde{f}_i(\tilde{s}_j) - \tilde{f}_k(\tilde{s}_j)) \cdot \tilde{P}_j)\right),$$

$$neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) = \sum_{j=1}^{M} \mu_e^j \left(gmv((\tilde{f}_i(\tilde{s}_j) - \tilde{f}_k(\tilde{s}_j)) \cdot \tilde{P}_j)\right),$$

$$nwF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) = \sum_{j=1}^{M} \mu_w^j \left(gmv((\tilde{f}_i(\tilde{s}_j) - \tilde{f}_k(\tilde{s}_j)) \cdot \tilde{P}_j)\right).$$

Burada $\mu_b^j, \mu_e^j, \mu_w^j$ müvafiq olaraq “daha yaxşı”, “ekvivalent” və “daha pis” qiymətləndirmələri üçün mənsubiyyət funksiyalarıdır[21].

j vəziyyətinə uyğun μ_b^j, μ_e^j, μ_w^j elə təyin edilir ki, Ruspini şərti ödənsin. Bu şərt aşağıdakı şəkildə ifadə olunur:

$$nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) + neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) + nwF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) =$$

[21] Farina,M.,&Amato, P. (2004). A fuzzy definition of ”optimality” for many-criteria optimization problems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, *34*(3), 315–326.

$$= \sum_{j=1}^{M}(\mu_b^j + \mu_e^j + \mu_w^j) = M.$$

$nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$, $neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$ və $nwF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$ əsasında $(1 - kF)$ -dominantlıq dərəcəsi təyin edilir. Bu anlayışlar $\tilde{f}_i$-nin $\tilde{f}_k$-ya nəzərən $(1 - kF)$-dominantlığını zəruri və kafi şərtini ifadə edir:

$$neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) < M, nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) \geq \frac{M - neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)}{kF + 1},$$

burada $kF \in [0,1]$.

$\tilde{f}_i$ -nin $\tilde{f}_k$ -ya nəzərən $(1 - kF)$ -dominantlığının ən böyük qiymətinə müvafiq kF-i müəyyən etmək üçün d funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilir [22]:

$$d(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) =$$

$$= \begin{cases} 0, & if \;\; nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) \leq \frac{M - neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)}{2} \\ \frac{2 \cdot nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) + neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) - M}{nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)}, & otherwise \end{cases}$$

Verilən d üçün, arzuolunan ən böyük kF dərəcəsi $1 - d(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$ kimi tapılır.

$d(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) = 1$ ifadəsi $\tilde{f}_i$ -nin $\tilde{f}_k$ -ya nəzərən Pareto üstünlüyü, $d(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) = 0$ isə $\tilde{f}_i$ -nin $\tilde{f}_k$ -ya nəzərən Pareto üstün olmaması deməkdir.

Qeyri-səlis optimallıq formalizmində $\tilde{f}^*$ Pareto optimallıq anlayışı əvəzinə, kF dərəcə ilə $\tilde{f}^*$ Pareto optimallıq anlayışı daxil edilir. $\tilde{f}^*$ yalnız və yalnız onda kF optimal hesab edilir ki, elə $\tilde{f}_i \in A$ tapmaq olmasın ki, $\tilde{f}_i$ alternativi $\tilde{f}^*$-a nəzərən $(1 - kF)$-dominant olsun.

Qeyri-səlis optimallıq konsepsiyasının əsas ideyası, $\tilde{f}^*$-nin Pareto optimallığının $do(\tilde{f}^*)$ optimallıq dərəcəsi aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$do(\tilde{f}^*) = 1 - \max_{\tilde{f}_i \in A} d(\tilde{f}_i, \tilde{f}^*).$$

[22] Rafik A. Aliev, Witold Pedrycz, A.V. Alizadeh, Oleg H. Huseynov. Fuzzy optimality based decision making under imperfect information without utility, Journal Fuzzy Optimization and Decision Making, Kluwer Academic Publishers Hingham, MA, USA, In: FO & DM, https://doi.org/10.1007/s10700-013-9160-2, 2013, Volume 12 Issue 4

Beləliklə, $do(\tilde{f}^*)$ dərəcəsi $\tilde{f}^*$-un bütün alternativlərə nəzərən üstünlük dərəcələrini nəzərə almaq nəticəsində yaranan bir dərəcədir.

do funksiyası kF-optimallıq anlayışını təsvir edən qeyri-səlis çoxluğun mənsubiyyət funksiyası hesab edilə bilər.

Layihə oblastı və məqsəd oblastında kF-Pareto optimal həllər çoxluğunu müvafiq olaraq S_{kF} Pareto optimal çoxluq və kF-optimal $\mathcal{F}_{kF}$ Pareto cəbhə (Pareto front) adlandırırıq.

Fərz edək ki, $\mu_D(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$ aşağıdakı kimi təyin edilən mənsubiyyət funksiyasıdır:

$$\mu_D(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) = \varphi_{\mu_D}(nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k), neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k), nwF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)).$$

Onda $\mu_D(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$ o vaxt qeyri-səlis üstünlük münasibəti olar ki, hər bir $\alpha \in [0,1]$ üçün $\mu_D(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) > \alpha$ ifadəsindən $\tilde{f}_i$-nin $\tilde{f}_k$-ya nəzərən $(1 - kF)$-dominantlığı alınsın.

Xüsusi halda, φ_{μ_D} aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\varphi_{\mu_D} = \frac{2 \cdot nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k) + neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)}{2M}.$$

$\mu_D(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$ mənsubiyyət funksiyası hər bir $0 \leq kF \leq 1$ üçün qeyri-səlis optimallıq münasibətini ifadə edir. $\tilde{f}^*$onda və yalnız onda μ_D-nin kF–kəsiyinə daxil olar ki,

$$\mu_D(\tilde{f}_i, \tilde{f}^*) > kF$$

şərtini ödəyən $\tilde{f}_i \in A$ tapmaq mümkün olmasın.

Üçüncü mərhələdə, $nbF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$, $neF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$, $nwF(\tilde{f}_i, \tilde{f}_k)$, qiymətləri əsasında qeyri-səlis Pareto optimal çoxluğa mənsubluq dərəcəsi kimi $do(\tilde{f}_i)$ optimallıq dərəcəsinin qiyməti hər bir $\tilde{f}_i \in A$ üçün müəyyən edilir. Əldə edilən $do()$ A üzərində $\gtrsim_l$ linqvistik üstünlük münasibətini əsaslı şəkildə müəyyənləşdirməyə imkan verir.

Dördüncü mərhələdə, hər bir $\tilde{f}_i, \tilde{f}_k \in A$ üçün $\tilde{f}_i$ -in $\tilde{f}_k$-ya nəzərən $Deg(\tilde{f}_i \gtrsim_l \tilde{f}_k)$ üstünlük dərəcəsi $do()$-ya əsaslanaraq müəyyən edilməlidir. Sadəlik üçün $Deg(\tilde{f}_i \gtrsim_l \tilde{f}_k)$ -ni aşağıdakı kimi hesablamaq olar:

$$Deg(\tilde{f}_i \gtrsim_l \tilde{f}_k) = do(\tilde{f}_i) - do(\tilde{f}_k).$$

Alternativlərin ranqlaşdırılmasına 5-ci fəsildə ətraflı baxılır.

Beşinci fəsildə ("Pareto optimallıq prinsipinə əsaslanan, Z-informasiya mühitində qərarların ranqlaşdırılması məsələsi") Pareto optimallıq prinsipinə əsaslanan, Z-informasiya mühitində qərarların ranqlaşdırılması məsələlərinin həllinə baxılır. Diskret Z-ədədlərin müqayisəsi əsasında qərar qəbuletmə, o cümlədən, faydalılıq funksiyası daxil olmayan qərar qəbuletmə, Z-ədədlərin qeyri-səlis optimallıq prinsipinə əsaslanan müqayisə üsulu verilir, Z-ədədlərin müqayisəsinə aid misallar göstərilir, Z-informasiya şəraitində qərar qəbuletmə modeli təklif edilir, Z-informasiya əsasında qərar qəbuletmənin əməli üsulları təklif edilir, Z-kəmiyyətlər üçün xətti riyazi proqramlaşdırmaya əsaslanan çoxmeyarlı qərar qəbuletmə üsulu şərh edilir.

Z-ədədlərin qeyri-səlis optimallıq prinsipinə əsaslanan müqayisəsi. Z-ədədlərin hesablanmasında digər vacib əməliyyatlardan biri və mühüm praktiki məsələ olan diskret Z-ədədlərin müqayisəsidir. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, gündəlik verdiyimiz qərarlar gələcək nəticələr və qərarların əminlik dərəcəsi ilə bağlı olur və qeyri-dəqiq informasiyaya əsaslanır.

Həqiqi ədədlərin müqayisəsindən fərqli olaraq, Z-ədədlər qeyri-səlis ədədlərin nizamlanmış cütü şəklində təsvir edilir və onların müqayisəsi (ranqlaşdırılması) üsulu yeganə ola bilməz.

Müqayisə üçün Z-ədədini iki atributun qiymətləri cütü kimi təsvir etməyi təklif edirik – birinci atribut dəyişənin qiymətinin ölçüsü, digəri isə birinci atributla bağlı olan etibarlılığın ölçüsüdür. Sonra Z-ədədləri çox-atributlu alternativlər kimi müqayisə etmək yetərli olar. Çoxölçülü alternativlərin müqayisəsinin əsas prinsipi Pareto optimal çoxluq daxilindəki bütün alternativlərin eyni dərəcədə optimal hesab edilməsinin əksinə olaraq qeyri-səlis nəzəriyyəyə əsaslanan Pareto optimallıq prinsipidir. Qeyri-səlis Pareto optimallıq (FPO) konsepsiyası çoxmeyarlı qərar qəbuletmə məsələlərinə çox yaxşı cavab verir [23]. Bu konsepsiya mövcud elmi konsepsiyaların CW əsasında yenidən işlənməsidir [24]. Bu yanaşmada alternativləri birbaşa

---

[23] Farina, M., and Amato, P. (2004). A fuzzy definition of "optimality" for many-criteria optimization problems, *IEEE T. Syst. Man Cy. A: Systems and Humans*, 34(3), pp. 315-326.
[24] Zadeh, L. A. (2006). Generalized theory of uncertainty (GTU) – principal concepts and ideas, *Comput. Stat. DataAn.,* 51, pp. 15-46

müqayisə edərək, bir alternativin daha yaxşı, bərabər olduğu və digərindən daha pis olduğu ümumi dərəcələri təyin edilir. Bu dərəcələr nəzərdən keçirilmiş alternativlər üçün atribut qiymətləri arasındakı fərqlərin dərəcələndirilmiş cəmləri kimi müəyyən edilir [25,26,27]. Belə müqayisə insanın atribut qiymətlərinə müvafiq olaraq alternativləri müqayisə etməsinə daha yaxındır.

Z-ədədlərin FPO prinsipi əsasında müqayisəsini aşağıdakı kimi nəzərdən keçirməyi təklif edirik. Tutaq ki, $Z_1 = (A_1, B_1)$ və $Z_2 = (A_2, B_2)$ Z-ədədləri verilib. Bu Z-ədədlərin müvafiq komponentlərini müqayisə etmək lazımdır. Bunun üçün Z-ədədlərdən birinin birinci və ikinci A və B komponentləri ilə müqayisədə digərindən daha yaxşı, ekvivalent və pis olduğunu qiymətləndirən n_b, n_e, n_w funksiyalarının qiymətlərini hesablamaq lazımdır. Toplam n_b dərəcəsi, $Z_1 = (A_1, B_1)$ -in $Z_2 = (A_2, B_2)$ -ə nəzərən üstünlük təşkil etdiyi komponentlərin sayını ölçür (minimum 0, maksimum 2).Toplam n_w dərəcəsi, $Z_1 = (A_1, B_1)$-in $Z_2 = (A_2, B_2)$-ə nəzərən üstünlük təşkil etmədiyi komponentlərin sayını ölçür (minimum 0, maksimum 2). Toplam n_e dərəcəsi, $Z_1 = (A_1, B_1)$ -in $Z_2 = (A_2, B_2)$ -ə nəzərən eyniyyət təşkil etmədiyi komponentlərin sayını ölçür (minimum 0, maksimum 2).

Tutaq ki, $Z_1 = (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ və $Z_2 = (\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ Z -ədədləri verilib. Əvvəlcə Z-ədədlərin 1-ci və 2-ci komponentlərlə müqayisədə hansının daha yaxşı, ekvivalent və daha pis olmasını göstərən n_b , n_e , n_w funksiyaları hesablanmalıdır:

$$n_b(Z_i, Z_j) = P_b(\tilde{\delta}_{\tilde{A}}^{i,j}) + P_b(\tilde{\delta}_{\tilde{B}}^{i,j}),$$

$$n_e(Z_i, Z_j) = P_e(\tilde{\delta}_{\tilde{A}}^{i,j}) + P_e(\tilde{\delta}_{\tilde{B}}^{i,j}),$$

$$n_w(Z_i, Z_j) = P_w(\tilde{\delta}_{\tilde{A}}^{i,j}) + P_w(\tilde{\delta}_{\tilde{B}}^{i,j}),$$

---

[25] Aliev, R. A. (2013) *Fundamentals of the Fuzzy Logic-Based Generalized Theory of Decisions*. (Springer, NewYork, Berlin).

[26] Aliev, R. A., Pedrycz, W., Alizadeh, A. V. and Huseynov, O. H. (2013). Fuzzy optimality based decision making under imperfect information without utility, *Fuzzy Optim. Decis. Ma.*, vol. 12, issue 4, pp. 357-372

[27] Farina, M., and Amato, P. (2004). A fuzzy definition of "optimality" for many-criteria optimization problems, *IEEE T. Syst. Man Cy. A: Systems and Humans*, 34(3), pp. 315-326.

burada $\tilde{\delta}_{\tilde{A}}^{i,j} = \tilde{A}_i - \tilde{A}_j,\ \tilde{\delta}_{\tilde{B}}^{i,j} = \tilde{B}_i - \tilde{B}_j,\ i,j = 1{,}2,\ i \neq j.$

Bu funksiyaların mənası aşağıdakı kimidir. Bir Z-ədədin digərinə nisbətən üstün, bərabər və üstün olmaması əslində insanın intuisiyası əsasında verilən bir dərəcədir. $\tilde{\delta}_{\tilde{A}}^{i,j} = \tilde{A}_i - \tilde{A}_j$ və $\tilde{\delta}_{\tilde{B}}^{i,j} = \tilde{B}_i - \tilde{B}_j,\ i,j = 1{,}2,\ i \neq j$ aşağıdakı funksiyalar vasitəsilə qiymətləndirilə bilər:

$$P_l(\tilde{\delta}_{\tilde{A}}^{i,j}) = \frac{Poss\left(\tilde{\delta}_{\tilde{A}}^{i,j}|\tilde{n}_l\right)}{\sum_{t\in\{b,e,w\}} Poss\left(\tilde{\delta}_{\tilde{A}}^{i,j}|\tilde{n}_t\right)},\ P_l(\tilde{\delta}_{\tilde{B}}^{i,j}) = \frac{Poss\left(\tilde{\delta}_{\tilde{B}}^{i,j}|\tilde{n}_l\right)}{\sum_{t\in\{b,e,w\}} Poss\left(\tilde{\delta}_{\tilde{B}}^{i,j}|\tilde{n}_t\right)},$$

$$t \in \{b,e,w\},\ i,j = 1{,}2,\ i \neq j.$$

Burada $Poss$ ilə n_b, n_e, n_w termlərinin mümkünlük ölçüsü işarə edilmişdir [28].

Buna görə $P_l()$ funksiyası çəki əmsallı mümkünlük ölçüsü kimi istifadə olunur.

$\sum_{t\in\{b,e,w\}} P_l(\tilde{\delta}_k^{i,j}) = 1$ olduğundan

$$n_b(Z_i,Z_j) + n_e(Z_i,Z_j) + n_w(Z_i,Z_j) = N,$$

burada N ilə Z-ədədlərin komponentləri sayı işarə edilib (N=2).

Sonra, n_b, n_e, n_w əsasında, $(1-k)$-üstünlük, dərəcə baxımından dominantlıq olaraq təyin olunur. Bu anlayışlara əsasən Z_1 Z-ədədi Z_2-ə nəzərən onda və yalnız onda $(1-k)$-dominant olar ki,

$$n_e(Z_i,Z_j) < 2,$$

$$n_b(Z_i,Z_j) \geq \frac{2-n_e(Z_i,Z_j)}{k+1},$$

şərtləri ödənsin, burada $k \in [0,1]$.

Sonra isə k-nın ən böyük qiymətini tapmaq tələb olunur ki, Z_i qiyməti Z_j- yə nəzərən, (1-k) dərəcədə Pareto dominant olsun. Bu məqsədlə d funksiyası təyin olunur [29]:

---

[28] Aliev, R. A. (2013) *Fundamentals of the Fuzzy Logic-Based Generalized Theory of Decisions*. (Springer, NewYork, Berlin).

[29] A.V. Alizadeh, Application of the Fuzzy Optimality Concept to Decision Making, Advances in Intelligent Systems and Computing Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-35249-3_69, 2019, 542-54, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-35249-3_69

$$d(Z_i, Z_j) =$$
$$= \begin{cases} 0, & \partial g\partial r \quad n_b(Z_i, Z_j) \leq \frac{2 - n_e(Z_i, Z_j)}{2} \\ \frac{2 \cdot n_b(Z_i, Z_j) + n_e(Z_i, Z_j) - 2}{n_b(Z_i, Z_j)}, & \partial ks \ halda \end{cases}$$

d funksiyasına əsasən k-nın ən böyük qiyməti $k = 1 - d(Z_i, Z_j)$ kimi tapılır və sonra $(1 - k) = d(Z_i, Z_j)$ olar. $d(Z_i, Z_j) = 1$ olması Z_i-nin Z_j üzərində Pareto dominantlığını ifadə edir. Lakin $d(Z_i, Z_j) = 0$ Z_i-nin Z_j üzərində heç bir Pareto dominantlığının olmadığını göstərir. $do(Z_i)$ optimallıq dərəcəsi aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$do(Z_i) = 1 - d(Z_j, Z_i).$$

Beləliklə, başqa sözlə desək, $do(Z_i)$ bir Z-ədədinin digərindən hansı dərəcədə üstün olduğunu göstərən dərəcədir.

Onda

$Z_i > Z_j$ iff $do(Z_i) > do(Z_j)$,

$Z_i < Z_j$ iff $do(Z_i) < do(Z_j)$,

$Z_i = Z_j$ iff $do(Z_i) = do(Z_j)$.

Xatırladaq ki, qeyri-səlis ədədlərin müqayisəsi həm də qeyri-müəyyənliklə bağlı olan məslədir. Mümkünlük-ehtimal qeyri-müəyyənliyi ifadə edən Z-ədədlər daha mürəkkəb riyazi konstruksiyalardır, ona görə də onların dərəcəyə əsaslanan müqayisəsi gerçəkliyi daha adekvat əks etdirir.

Təklif edilən qeyri-səlis optimallığa əsaslanan üsul Z-ədədlərin insan tərəfindən ranqlaşdırılması hesab oluna bilər. Bu baxımdan biz bu üsulda Z-ədədin seçiminə təsir göstərən pessimistlik dərəcəsini $\beta \in [0,1]$ əqli amil (mental factor) kimi nəzərə almağı təklif edirik. Pessimistik dərəcə verilmiş Z-ədədləri müqayisə etməyə çalışan insan (ekspert) müşahidəsinə əsaslanır, lakin bu əvvəl qeyd etdiyimiz qeyri-səlis optimallığa əsaslanan üsul ilə əldə edilmiş nəticələrə tamam uyğun gəlmir. Bu üsula əsasən verilmiş $do(Z_j) \leq do(Z_i)$ verildikdə biz iki Z_1 və Z_2 Z-ədəd vasitəsilə ifadə edilən $r(Z_i, Z_j)$ kəmiyyətini aşağıdakı kimi təyin edirik:

$r(Z_i, Z_j) = \beta do(Z_j) + (1 - \beta) do(Z_i)$.

Onda

$Z_i > Z_j$ iff $r(Z_i, Z_j) > \frac{1}{2}(do(Z_i) + do(Z_j))$,

$Z_i < Z_j$ iff $r(Z_i, Z_j) < \frac{1}{2}(do(Z_i) + do(Z_j))$,

digər hallarda $Z_i = Z_j$ olar.

Pessimistlik dərəcəsi (β) insan müşahidəsinə əsaslanır və o Z-ədədlərin ranqlaşdırılmasını hesablanmış do dərəcələrinə insanın münasibətini əks etdirmək üçün uyğunlaşdırılır. Insan amilinin olduğu hər bir məsələ üçün bu münasibət Z-ədədlərin $\tilde{A}$ və $\tilde{B}$ komponentlərinin müxtəlif vaciblik dərəcəsindən asılı olaraq müxtəlif nəticələri ola bilər.

Altıncı fəsil ("Təklif olunan qərar qəbuletmə üsullarının tətbiqi") Z-informasiya mühitində qərar qəbuletmə üsullarının tətbiqləri və simulyasiyasına həsr edilib. Təchizat məsələsi üçün qərar qəbuletmə, çoxmeyarlı marketinq məsələsi üçün qərar qəbuletmə, şirkətin istehsalının Z-xətti proqramlaşdırma əsasında optimal planlaşdırılması kimi standart qərar qəbuletmə məsələlərinin həllinə təklif edilən üsulların tətbiqinin nəticələri verilmişdir.

6.1. Təchizat məsələsi üçün qərar qəbuletmə

Qeyri-dəqiq məlumat əsasında qərar qəbuletmə məsələsini müxtəlif iqtisadi şərtləri nəzərə alaraq tədarükçü seçimi problemi kimi nəzərdən keçirək.

Alternativlər çoxluğu beş təchizatçı çoxluğu ilə təmsil olunur: $A = \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4, \tilde{f}_5\}$.

Təbiət vəziyyətləri toplusu beş mümkün iqtisadi şərtlə təsvir olunur: $S = \{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4, \tilde{s}_5\}$.

Hər bir $\tilde{s}_j$ iqtisadi vəziyyəti təchizatçının gəlirliliyi, əlaqənin yaxınlığı, texnoloji imkanları, uyğunluq keyfiyyəti və münaqişələrin həlli aspektlərinə tələblərlə xarakterizə olunur.

İqtisadi şəraitdə alternativlərin nəticələrinin qeyri-səlis qiymətləndirmələri aşağıdakı cədvəli verilmişdir (Cədvəl 3):

Cədvəl 1. Qeyri-səlis nəticələr cədvəli

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
f_1	(5.0,7.0,9.0)	(7.0,9.0,10.0)	(3.0,5.0,7.0)	(9.0,10.0,10.0)	(5.0,7.0,9.0)
f_2	(1.0,3.0,5.0)	(3.0,5.0,7.0)	(5.0,7.0,9.0)	(7.0,9.0,10.0)	(1.0,3.0,5.0)
f_3	(3.0,5.0,7.0)	(5.0,7.0,9.0)	(7.0,9.0,10.0)	(5.0,7.0,9.0)	(3.0,5.0,7.0)
f_4	(0.0,1.0,3.0)	(1.0,3.0,5.0)	(0.0,1.0,3.0)	(1.0,3.0,5.0)	(7.0,9.0,10.0)
f_5	(7.0,9.0,10.0)	(0.0,1.0,3.0)	(1.0,3.0,5.0)	(3.0,5.0,7.0)	(0.0,1.0,3.0)

İqtisadi şəraitin ehtimalları barədə linqvistik məlumatlar aşağıdakı kimi təsvir olunub:

$$\tilde{P}^l = (0.2, 0.3, 0.4)/s_1 + (0.1, 0.2, 0.3)/s_2 + (0.0, 0.1, 0.2)/s_3 + \\ + (0.3, 0.3, 0.5)/s_4 + (0.0, 0.1, 0.4)/s_5$$

Qeyri-səlis optimallıq konsepsiyasına əsaslanan yanaşmanı tətbiq etməklə, baxılan məsələ aşağıdakı kimi həll edilə bilər. Əvvəlcə nbF, neF,nwF hesablanır:

$$nbF = \begin{bmatrix} 0 & 0.28667 & 0.21 & 0.55667 & 0.42667 \\ 0.02 & 0 & 0.056667 & 0.35667 & 0.28 \\ 0.033333 & 0.14667 & 0 & 0.41333 & 0.31 \\ 0.02 & 0.086667 & 0.053333 & 0 & 0.15667 \\ 0.046667 & 0.16667 & 0.10667 & 0.31333 & 0 \end{bmatrix},$$

$$neF = \begin{bmatrix} 5 & 4.6933 & 4.7567 & 4.4233 & 4.5267 \\ 4.6933 & 5 & 4.7967 & 4.5567 & 4.5533 \\ 4.7567 & 4.7967 & 5 & 4.5333 & 4.5833 \\ 4.4233 & 4.5567 & 4.5333 & 5 & 4.53 \\ 4.5267 & 4.5533 & 4.5833 & 4.53 & 5 \end{bmatrix},$$

$$nwF = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 & 0.033333 & 0.02 & 0.046667 \\ 0.28667 & 0 & 0.14667 & 0.086667 & 0.16667 \\ 0.21 & 0.056667 & 0 & 0.053333 & 0.10667 \\ 0.55667 & 0.35667 & 0.41333 & 0 & 0.31333 \\ 0.42667 & 0.28 & 0.31 & 0.15667 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sonra μ_D və $d(f_i, f_k)$ hesablayırıq

$$\mu_D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.47333 & 0.48233 & 0.44633 & 0.462 \\ 0.52667 & 0.5 & 0.509 & 0.473 & 0.48867 \\ 0.51767 & 0.491 & 0.5 & 0.464 & 0.47967 \\ 0.55367 & 0.527 & 0.536 & 0.5 & 0.51567 \\ 0.538 & 0.51133 & 0.52033 & 0.48433 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$d(f_i, f_k) = \begin{bmatrix} 0 & 0.93023 & 0.84127 & 0.96407 & 0.89062 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75701 & 0.40476 \\ 0 & 0.61364 & 0 & 0.87097 & 0.65591 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nəhayət, nəzərdən keçirilmiş alternativlərin hər biri üçün optimallıq dərəcəsini hesablayırıq:

$$do = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.069767 \\ 0.15873 \\ 0.035928 \\ 0.10938 \end{bmatrix}.$$

Beləliklə, əldə edilən üstünlüklər $\tilde{f}_1 \gtrsim \tilde{f}_3 \gtrsim \tilde{f}_5 \gtrsim \tilde{f}_2 \gtrsim \tilde{f}_4$ kimi olur. Üstünlük dərəcələri aşağıdakılardır:

$Deg(\tilde{f}_1 \gtrsim_l \tilde{f}_3) = 0.84,\ Deg(\tilde{f}_3 \gtrsim_l \tilde{f}_5) = 0.05,$

$Deg(\tilde{f}_5 \gtrsim_l \tilde{f}_2) = 0.04,\ Deg(\tilde{f}_2 \gtrsim_l \tilde{f}_4) = 0.034.$

Bu üsulla əldə edilən üstünlük: $\tilde{f}_1 \gtrsim \tilde{f}_3 \gtrsim \tilde{f}_2 \gtrsim \tilde{f}_5 \gtrsim \tilde{f}_4$ olur. Bununla yanaşı, təklif olunan metod digər metodla müqayisədə bir sıra üstünlüklərə malikdir. Birincisi, təklif etdiyimiz üsul nəinki alternativlər arasındakı nizamı müəyyənləşdirir, həm də nəzərdən keçirilən alternativin nə dərəcədə optimal olduğunu müəyyənləşdirir. Bu dərəcə, nəzərdən keçirilən alternativin digərlərindən daha yaxşı olduğu ümumi dərəcədir. İkincisi, digər təklif edilən üsul vasitəsilə eyni hesab edilən alternativlər arasından, təklif etdiyimiz yanaşmadan istifadə edərək müvafiq k_F qiymətləri müəyyənləşdirməklə onları daha az və optimal olanlara ayırmaq mümkündür.

6.2. Çox meyarlı marketinq məsələsi üçün qərar qəbuletmə.

Z-informasiya əsasında marketinq qərarlarının verilməsi. Bu tətbiqetmədə İT sahəsində marketinq qərarlarının verilməsi məsələsinə baxılır. "Techware Incorporated" tərəfindən iki yeni proqram məhsulu bazara təqdim edilir; şirkətin bu iki məhsulla əlaqəli üç alternativi var: yalnız məhsul-1 təqdim edir, yalnız məhsul-2 təqdim edir və ya hər iki məhsulu təqdim edir. Bu iki məhsul üçün tədqiqat və inkişaf xərcləri müvafiq olaraq 180.000 və 150.000 dollardır. Milli iqtisadiyyatın meyli və istehlakçıların bu məhsullara reaksiyası bu məhsulların qarşıdakı illərdəki müvəffəqiyyətinə təsir edəcəkdir. Əgər şirkət məhsul-1 təqdim etsə, güclü, ətalətli və zəif milli iqtisadiyyat üçün $ 500,000, 260.000 $ və $ 120,000 gəlir əldə edəcəkdir. İqtisadiyyatı müvafiq olaraq. Eynilə məhsul-2 təqdim edildikdə, güclü, ətalətli və zəif bir milli iqtisadiyyat üçün müvafiq olaraq 420.000, 230.000$ və 110.000$ gəlir olacaq. Hər iki məhsulu, məhsul-1 və məhsul-2 təqdim edərkən gəlirləri müvafiq olaraq güclü, ətalətli və zəif milli iqtisadiyyat üçün $820,000, 390,000$, 200,000$ olacaqdır. Şirkət mütəxəssisləri çox güclü və ətalətli iqtisadiyyata dair ehtimalların müvafiq olaraq 0.30 və 0.50 arasında olduğuna əmindirlər. Məsələ ən yaxşı qərarı müəyyənləşdirməkdən ibarətdir. Təhlil edilmiş məlumatlar "Techware Incorporated"-dən əldə edilib [30].

Nəzərdə tutulan qərar məsələsinin formal təsvirinə keçək. Nəzərdə tutulan məsələdə qismən etibarlı linqvistik qərara aid məlumatlar Z-ədədlərlə təsvir edilib. Alternativlər çoxluğu aşağıdakı kimidir:

$$\mathcal{A} = \{f_1, f_2, f_3\},$$

[30] Winston, W. L. and Albright, S.C., Broadie, M. (2002) *Practical management science. Thomas Learning*, 2nd Ed., pp. 496-498.

Burada f_1 məhsul-1-i tanıtdırır, f_2 məhsul-2-ni tanıtdırır, f_3 hər iki məhsulu tanıdır (məhsul-1 və məhsul-2).

Təbiət hallarının məcmusu:

$$\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$$

burada S_1 güclü milli iqtisadiyyatı ifadə edir, S_2 ədalətli milli iqtisadiyyatı ifadə edir, S_3 güclü milli iqtisadiyyatı ifadə edir.

Təbiət vəziyyətlərinin ehtimalları belədir:

$Z_{P(S_1)} = (about\ 0.3, quite\ sure)$,

$Z_{P(S_2)} = (about\ 0.5, quite\ sure)$.

Nəticələrin məcmusu:

$\mathcal{X} = \{(low, likely), (more\ than\ low, likely),$
$(medium, likely), (below\ \ than\ high, likely), (high, likely)\}$
olur.

Təbiətin vəziyyətlərinin ehtimalları və təbiətin müxtəlif vəziyyətlərində alınan hər bir alternativin faydalılığı üçün qismən etibarlı linqvistik məlumatlar Cədvəl 2-də göstərilmişdir.

Cədvəl 2. Müxtəlif alternativlər və təbii vəziyyətlərin ehtimalları üçün faydalılığın qiymətləri

	S_1	S_2	S_3
	(about 0.3, quite sure)	(about 0.5, quite sure)	(about 0.2, quite sure)
f_1	$(high;\ likely)$	$(medium;\ likely)$	$(low;\ likely$
f_2	$(below\ than\ high;\ like$	$(medium;\ likely)$	$(low;\ likely$
f_3	$(high;\ likely)$	$(more\ than\ low;\ likel$	$(low;\ likely$

Z-ədədlərlə ifadə edilən müvafiq qərar matrisi Cədvəl 3-də göstərilmişdir.

Cədvəl 3. Z-qiymətli qərar matrisi

	S_1	S_2	S_3
f_1	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}
f_2	Z_{21}	Z_{22}	Z_{23}
f_3	Z_{31}	Z_{32}	Z_{33}

6.3. Z-xətti proqramlaşdırma əsasında şirkətin istehsalının optimal planlaşdırılması

İki qərar dəyişənindən asılı aşağıdakı Z-xətti proqramlaşdırma (LP) məsələsini nəzərdən keçirək[31] :

$$Z_{c_1}Z_{x_1} + Z_{c_2}Z_{x_2} \to \max$$

subject to

$Z_{a_{11}}Z_{x_1} + Z_{a_{12}}Z_{x_2} \leq^{Z} Z_{b_1},$

$Z_{a_{21}}Z_{x_1} + Z_{a_{22}}Z_{x_2} \leq^{Z} Z_{b_2},$

$Z_{x_1}, Z_{x_2} \geq^{Z} Z_0,$

burada $Z_{x_1} = (A_{x_1}, B_{x_1}), Z_{x_2} = (A_{x_2}, B_{x_2}),$

$Z_{c_1} = (A_{c_1}, B_{c_1}), Z_{c_2} = (A_{c_2}, B_{c_2}),$

$Z_{a_{11}} = (A_{a_{11}}, B_{a_{11}}), Z_{a_{12}} = (A_{a_{12}}, B_{a_{12}}), Z_{a_{21}} = (A_{a_{21}}, B_{a_{21}}),$

$Z_{a_{22}} = (A_{a_{22}}, B_{a_{22}}),$

$Z_{b_1} = (A_{b_1}, B_{b_1}), Z_{b_2} = (A_{b_2}, B_{b_2}).$

Bu Z-ədədlərin qiymətləri aşağıda verilmişdir.

$Z_{c_1} = (A_{c_1}, B_{c_1})$ Z-ədədinin komponentləri:

$A_{c_1} = {}^{0.0}/_{0} + {}^{0.0}/_{1} + {}^{0.0003}/_{2} + {}^{0.01}/_{3} + {}^{0.14}/_{4} + {}^{0.61}/_{5} + {}^{1.0}/_{6} + {}^{0.61}/_{7} +$
$+ {}^{0.14}/_{8} + {}^{0.01}/_{9} + {}^{0.0003}/_{10},$

$B_{c_1} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0}/_{0.2} + {}^{0.01}/_{0.3} + {}^{0.14}/_{0.4} + {}^{0.60}/_{0.5} + {}^{1}/_{0.6} +$
$+ {}^{0.61}/_{0.7} + {}^{0.14}/_{0.8} + {}^{0.01}/_{0.9} + {}^{0}/_{1}.$

$Z_{c_2} = (A_{c_2}, B_{c_2})$ Z-ədədinin komponentləri:

$A_{c_2} = {}^{0.0}/_{0} + {}^{0.0}/_{1} + {}^{0.0}/_{2} + {}^{0.0}/_{3} + {}^{0.0003}/_{4} + {}^{0.01}/_{5} + {}^{0.14}/_{6} + {}^{0.61}/_{7} +$
$+ {}^{1.0}/_{8} + {}^{0.61}/_{9} + {}^{0.14}/_{10},$

[31] Aliev, R. A., Alizadeh, A. V., Huseynov, O. H., Jabbarova, K.I. Z-number based Linear Programming. *Int. J. Intell. Syst.*

$B_{c_2} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0.01}/_{0.2} + {}^{0.14}/_{0.3} + {}^{0.61}/_{0.4} + {}^{1}/_{0.5} + {}^{0.61}/_{0.6} +$
$+ {}^{0.14}/_{0.7} + {}^{0.01}/_{0.8} + {}^{0}/_{0.9} + {}^{0}/_{1}.$

$Z_{a_{11}} = (A_{a_{11}}, B_{a_{11}})$ Z-ədədinin komponentləri:

$A_{a_{11}} = {}^{0.01}/_{0} + {}^{0.14}/_{1} + {}^{0.61}/_{2} + {}^{1.0}/_{3} + {}^{0.61}/_{4} + {}^{0.14}/_{5} + {}^{0.01}/_{6} +$
$+ {}^{0.001}/_{7} + {}^{0}/_{8} + {}^{0}/_{9} + {}^{0}/_{10},$

$B_{a_{11}} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0}/_{0.2} + {}^{0}/_{0.3} + {}^{0}/_{0.4} + {}^{0}/_{0.5} + {}^{0.01}/_{0.6} + {}^{0.14}/_{0.7} +$
$+ {}^{0.61}/_{0.8} + {}^{1}/_{0.9} + {}^{0.61}/_{1}.$

$Z_{a_{12}} = (A_{a_{12}}, B_{a_{12}})$ Z-ədədinin komponentləri:

$A_{a_{12}} = {}^{0.61}/_{0} + {}^{1}/_{1} + {}^{1.0}/_{2} + {}^{0.61}/_{3} + {}^{0.14}/_{4} + {}^{0.01}/_{5} + {}^{0.001}/_{6} + {}^{0}/_{7} +$
$+ {}^{0}/_{8} + {}^{0}/_{9} + {}^{0}/_{10},$

$B_{a_{12}} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0}/_{0.2} + {}^{0}/_{0.3} + {}^{0}/_{0.4} + {}^{0}/_{0.5} + {}^{0.01}/_{0.6} + {}^{0.14}/_{0.7} +$
$+ {}^{0.61}/_{0.8} + {}^{1}/_{0.9} + {}^{0.61}/_{1}.$

Sadəlik üçün, $Z_{a_{21}} = (A_{a_{21}}, B_{a_{21}})$ və $Z_{a_{22}} = (A_{a_{22}}, B_{a_{22}})$ sinqlton seçilmişdir:

$A_{a_{21}} = 1, B_{a_{21}} = 1;$

$A_{a_{22}} = 1, B_{a_{22}} = 1.$

$Z_{b_1} = (A_{b_1}, B_{b_1})$ Z-ədədinin komponentləri:

$A_{b_1} = {}^{0.14}/_{0} + {}^{0.61}/_{1} + {}^{1}/_{2} + {}^{0.61}/_{3} + {}^{1.0}/_{4} + {}^{0.61}/_{5} + {}^{0.14}/_{6} + {}^{0.01}/_{7} +$
$+ {}^{0.001}/_{8} + {}^{0}/_{9} + {}^{0}/_{10},$

$B_{b_1} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0}/_{0.2} + {}^{0}/_{0.3} + {}^{0}/_{0.4} + {}^{0}/_{0.5} + {}^{0.01}/_{0.6} + {}^{0.14}/_{0.7} +$
$+ {}^{0.61}/_{0.8} + {}^{1}/_{0.9} + {}^{0.61}/_{1}.$

$Z_{b_2} = (A_{b_2}, B_{b_2})$ Z-ədədinin komponentləri:

$A_{b_2} = {}^{0.01}/_{0} + {}^{0.14}/_{1} + {}^{0.61}/_{2} + {}^{1.0}/_{3} + {}^{0.14}/_{4} + {}^{0.01}/_{5} + {}^{0}/_{6} + {}^{0}/_{7} + {}^{0}/_{8} +$
$+ {}^{0}/_{9} + {}^{0}/_{10},$

$B_{b_2} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0}/_{0.2} + {}^{0}/_{0.3} + {}^{0}/_{0.4} + {}^{0}/_{0.5} + {}^{0.01}/_{0.6} + {}^{0.14}/_{0.7} +$
$+ {}^{0.61}/_{0.8} + {}^{1}/_{0.9} + {}^{0.61}/_{1}.$

Z-qiymətli əlavə dəyişənləri daxil edərək alarıq:

$$Z_{c_1}Z_{x_1} + Z_{c_2}Z_{x_2} \to \max$$

subject to

$Z_{a_{11}}Z_{x_1} + Z_{a_{12}}Z_{x_2} + Z_{x_3} = Z_{b_1},$

$Z_{a_{21}}Z_{x_1} + Z_{a_{22}}Z_{x_2} + Z_{x_4} = Z_{b_2},$

$Z_{x_1}, Z_{x_2}, Z_{x_3}, Z_{x_4} \geq^{Z} Z_0.$

Sonra ekvivalent formaya gəlirik:

$$-(Z_{c_1}Z_{x_1} + Z_{c_2}Z_{x_2}) + (Z_{b_1} - (Z_{a_{11}}Z_{x_1} + Z_{a_{12}}Z_{x_2} + Z_{x_3} + Z_{x_4})) +$$
$$+(Z_{b_2} - (Z_{a_{21}}Z_{x_1} + Z_{a_{22}}Z_{x_2} + Z_{x_3} + Z_{x_4})) \to \min$$

subject to

$Z_{x_1}, Z_{x_2}, Z_{x_3}, Z_{x_4} \geq^{Z} Z_0.$

Bu məsələni həll etmək üçün DEO alqoritminə əsaslanan üsulu tətbiq edirik [32]. DE optimallaşdırma alqoritmi parametrlərinin aşağıdakı qiymətləri ilə tətbiq edilmişdir: mutasiya dərəcəsi $F = 0.8$, çarpazlaşdırma ehtimalı $CR = 0.7$, populyasiya ölçüsü $PN = 80$. Əldə edilmiş optimal həll və məqsəd funksiyanın optimal qiyməti aşağıda verilmişdir.

Birinci qərar dəyişəni $Z_{x_1} = (A_{x_1}, B_{x_1})$:

$$A_{x_1} = {}^{1.0}/_{0} + {}^{0.61}/_{1} + {}^{0.14}/_{2} + {}^{0.01}/_{3} + {}^{0.0}/_{4} + {}^{0.0}/_{5} +$$
$$+ {}^{0.0}/_{6} + {}^{0.0}/_{7} + {}^{0.0}/_{8} + {}^{0.0}/_{9} + {}^{0.0}/_{10},$$

$$B_{x_1} = {}^{0.14}/_{0} + {}^{0.61}/_{0.1} + {}^{1.0}/_{0.2} + {}^{0.61}/_{0.3} + {}^{0.14}/_{0.4} +$$
$$+ {}^{0.01}/_{0.5} + {}^{0.0}/_{0.6} + {}^{0.0}/_{0.7} + {}^{0.0}/_{0.8} + {}^{0.0}/_{0.9} + {}^{0.0}/_{1}.$$

İkinci qərar dəyişəni $Z_{x_2} = (A_{x_2}, B_{x_2})$:

---

[32] Aliev, R. A., Alizadeh, A. V., Huseynov, O. H., Jabbarova, K.I. Z-number based Linear Programming. *Int. J. Intell. Syst.*

$A_{x_2} = {}^{0.01}/_{0} + {}^{0.14}/_{1} + {}^{0.61}/_{2} + {}^{1}/_{3} + {}^{0.61}/_{4} + {}^{0.14}/_{5} +$
$+ {}^{0.01}/_{6} + {}^{0}/_{7} + {}^{0}/_{8} + {}^{0}/_{9} + {}^{0}/_{10},$

$B_{x_2} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0}/_{0.2} + {}^{0}/_{0.3} + {}^{0}/_{0.4} + {}^{0.0001}/_{0.5} +$
$+ {}^{0.001}/_{0.6} + {}^{0.01}/_{0.7} + {}^{0.14}/_{0.8} + {}^{0.61}/_{0.9} + {}^{1}/_{1}.$

Üçüncü (əlavə) qərar dəyişəni $Z_{x_3} = (A_{x_3}, B_{x_3})$:

$A_{x_3} = {}^{0}/_{0} + {}^{0.01}/_{1} + {}^{0.14}/_{2} + {}^{0.61}/_{3} + {}^{1}/_{4} + {}^{0.61}/_{5} +$
$+ {}^{0.14}/_{6} + {}^{0.01}/_{7} + {}^{0}/_{8} + {}^{0}/_{9} + {}^{0}/_{10},$

$B_{x_3} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0}/_{0.2} + {}^{0.001}/_{0.3} + {}^{0.01}/_{0.4} + {}^{0.14}/_{0.5} +$
$+ {}^{0.61}/_{0.6} + {}^{1}/_{0.7} + {}^{0.61}/_{0.8} + {}^{0.14}/_{0.9} + {}^{0.01}/_{1}.$

Dissertasiya işində təklif olunan nəzəri müddəalar Matlab proqramlar paketinə uyğun olaraq yaradılmış Zlab proqramlar paketində geniş tətbiq edilmişdir. O cümlədən, Z-ədədlər üzərində əməllər, Z-xətti proqramlaşdırma, Pareto optimallıq və s. Zlab paketinə daxil edilmiş və dünyanın müxtəlif ölkələrində geniş istifadə olunur.

Dördüncü (əlavə) qərar dəyişəni $Z_{x_4} = (A_{x_4}, B_{x_4})$:

$A_{x_4} = {}^{0}/_{0} + {}^{0.01}/_{1} + {}^{0.14}/_{2} + {}^{0.61}/_{3} + {}^{1}/_{4} + {}^{0.61}/_{5} +$
$+ {}^{0.14}/_{6} + {}^{0.01}/_{7} + {}^{0}/_{8} + {}^{0}/_{9} + {}^{0}/_{10},$

$B_{x_4} = {}^{0}/_{0} + {}^{0}/_{0.1} + {}^{0}/_{0.2} + {}^{0.01}/_{0.3} + {}^{0.14}/_{0.4} + {}^{0.61}/_{0.5} +$
$+ {}^{1}/_{0.6} + {}^{0.61}/_{0.7} + {}^{0.14}/_{0.8} + {}^{0.01}/_{0.9} + {}^{0}/_{1}.$

Məqsəd funksiyanın optimal qiyməti $Z_f(Z_{x_1}, Z_{x_2}) = (A_f, B_f)$:

$A_f = {}^{0}/_{0} + {}^{0.61}/_{14} + {}^{1}/_{24} + {}^{0.61}/_{32} + {}^{0.14}/_{43} +$
$+ {}^{0.14}/_{66} + {}^{0}/_{86} + {}^{0}/_{120} + {}^{0}/_{160},$

$B_f = {}^{0}/_{0.09} + {}^{0}/_{0.12} + {}^{0}/_{0.14} + {}^{0}/_{0.143} + {}^{0}/_{0.17} + {}^{0}/_{0.2} +$
$+ {}^{0.0001}/_{0.22} + {}^{0.01}/_{0.224} + {}^{0.14}/_{0.25} + {}^{0.61}/_{0.28} + {}^{1}/_{0.3}.$

Bu Z-LP nümunəsinin nəticələrinin müqayisəli təhlili üçün Ümumiləşdirilmiş Qeyri-səlis Ədədlər (GFN) baxımından [33] -də göstərilən eyni [LP] məsələsi nəzərdən keçirilib. GFN-yə əsaslanan üsulda Z-ədədlər, mənsubiyyət funksiyasının maksimum qiyməti w olan bir $(a, b, c, d; w)$ trapesşəkilli qeyri-səlis ədədlə əvəz edilir. [23]-də əldə olunan nəticələr belədir:

$x_1 = 0$, $x_2 = (1,2,4,7; 0.7)$ və $f = (4,12,40,112; 0.5)$.

$Z_{x_1} = (A_{x_1}, B_{x_1})$-in birinci komponentinin nüvəsi $core(A_{x_1}) = 0$-a bərabərdir və GFN üçün ən yüksək mənsubiyyət qiymətləri olan intervalın mərkəzi x_1 3-ə bərabərdir.

$Z_{x_2} = (A_{x_2}, B_{x_2})$-in birinci komponentinin nüvəsi $core(A_{x_1}) = 3$-a bərabərdir və GFN üçün ən yüksək mənsubiyyət qiymətləri olan intervalın mərkəzi x_2 2.45-ə bərabərdir.

Məqsəd funksiyanın optimal qiymətini təsvir edən $Z_f(Z_{x_1}, Z_{x_2}) = (A_f, B_f)$ Z-ədədinin birinci komponentinin nüvəsi $core(A_f) = 24$, GFN $(4,12,40,112; 0.5)$ üçün ən yüksək mənsubiyyət qiymətinə uyğun intervalın mərkəzinin ranqı 21-dir.

Eyni zamanda, müqayisə edilən yanaşmalar əsasında əldə edilən nəticələrin etibarlılıq səviyyəsindəki fərq daha böyükdür. Ancaq hər iki yanaşma əsasında əldə edilən nəticələrin bir-birinə yaxın olduğunu görə bilərik. [23]-də təklif olunan yanaşma ilə[34]-da təklif etdiyimiz yanaşma arasında iki əsas fərq var.

Birinci fərq odur ki, bir yanaşma Z-ədədlərə əsaslanır, digər yanaşma isə ümumiləşdirilmiş qeyri-səlis ədədlərə (GFN) əsaslanır. Ümumiləşdirilmiş qeyri-səlis ədəd, modifikasiya edilmiş trapesşəkilli qeyri-səlis ədəddir $(a, b, c, d; w)$, burada w mənsubiyyət funksiyasının maksimum qiymətidir. Beləliklə, bu formalizmdə, dürüst olmayan bir qiymətləndirmə ilə əlaqəli inam, 1-dən kiçik ola biləcək mənsubiyyət funksiyasının maksimum qiyməti kimi təsvir olunur. Yəni Z-ədədi daha strukturlu formal təsvirdir və daha ifadəli

---

[33] Kumar, A., Singh P. and Kaur, J. (2010). Generalized Simplex Algorithm to Solve Fuzzy Linear Programming Problems with Ranking of Generalized Fuzzy Numbers. *TJFS,* 1, pp:80-103.

[34] Aliev, R. A., Alizadeh, A. V., Huseynov, O. H., Jabbarova, K.I. Z-number based Linear Programming. *Int. J. Intell. Syst.*, accepted.

bir gücə malikdir. Z-ədədinin A_x-nə olan inam (etibarlılıq) A_x-in ehtimal ölçüsü vasitəsilə ifadə olunur. Üstəlik, Z-ədədlər ilə hesablama zamanı etibarlılığın yayılması daha fundamental səviyyədə aparılır və etibarlılıq hər addımda hesablanır. Bunun əksinə olaraq, GFN istifadə edərkən inamın yayılması daha bəsit səviyyədə aparılır (minimum əməli istifadə olunur). Digər tərəfdən, Z-ədəddə inam qeyri-səlis ədədlə təsvir olunur, halbuki GFN inam məntiqə uymayan dəqiq bir qiymətlə ifadə olunub.

6.4. Z-riyazi proqramlaşdırmaya əsaslanan çoxmeyarlı qərar qəbuletmə. Mix-məhsulda biznes qərarları (Business Decision Making in Mix-product). Bir istehsal şirkəti A, B və C məhsulları istehsal edir və istehsal altı prosesdən ibarətdir. Qərar qəbul edənin üç məqsədi var: qazancı, keyfiyyəti və işçi məmnuniyyətini artırmaq. Təbii ki, məqsəd funksiyaların və məhdudiyyətlərin parametrləri Z-ədədləri ilə təyin olunur. İstehsalın planlaşdırılması haqqında Z-məlumat Cədvəl 4-də verilmişdir. Z-gözlənilən mənfəət, keyfiyyət indeksi və işçi məmnuniyyəti indeksi haqqında məlumat Cədvəl 5-də verilmişdir.

Cədvəl 4. Z-istehsal planlaşdırma məlumatları

Resurs növü	A məhsulu (Z_{x_1})	B məhsulu (Z_{x_2})	C məhsulu (Z_{x_3})	Ayda mümkün olan maksimum gücü (saat) (Z_{b_i})
1	$Z_{a_{11}} = (about\ 12, 0{,}9)$	$Z_{a_{12}} = (about\ 17, 0{,}9)$	$Z_{a_{13}} = (about\ 0, 0{,}9)$	$Z_{b_1} = (about\ 1400{,}0{,}9)$
2	$Z_{a_{21}} = (about\ 2, 0{,}9)$	$Z_{a_{22}} = (about\ 9, 0{,}9)$	$Z_{a_{23}} = (about\ 8, 0{,}9)$	$Z_{b_2} = (about\ 1000, 0{,}9)$
3	$Z_{a_{31}} = (about\ 10, 0{,}9)$	$Z_{a_{32}} = (about\ 13, 0{,}9)$	$Z_{a_{33}} = (about\ 15, 0{,}9)$	$Z_{b_3} = (about\ 1750{,}0{,}9)$
4	$Z_{11} = (about\ 6, 0{,}9)$	$Z_{42} = (about\ 0, 0{,}9)$	$Z_{a_{13}} = (about\ 16, 0{,}9)$	$Z_{b_4} = (about\ 1325, 0{,}9)$
5	$Z_{51} = (about\ 0, 0{,}9)$	$Z_{52} = (about\ 12{,}0{,}9)$	$Z_{a_{53}} = (about\ 7, 0{,}9)$	$Z_{b_5} = (about\ 900, 0{,}9)$

6	$Z_{61} =$ $(about\ 9{,}5,\ 0{,}9)$	$Z_{62} =$ $(about\ 9{,}5,\ 0{,}9)$	$Z_{a_{63}} =$ $(about\ 4,\ 0{,}9)$	$Z_{b_6} =$ $(about\ 1075,\quad 0{,}9)$

Cədvəl 5. Z-mənfəət, keyfiyyət və işçi məmnuniyyəti haqqında məlumat

Məqsədlərin növü	A Məhsul	B Məhsul	C Məhsul
Mənfəət	$Z_{C_{11}} =$ $(about\ 0,\ 0{,}8)$	$Z_{C_{12}} =$ $(about\ 100,\ 0{,}8)$	$Z_{C_{13}} =$ $(about\ 17{,}5,\ 0{,}8)$
Keyfiyyət	$Z_{C_{21}} =$ $(about\ 92,\ 0{,}8)$	$Z_{C_{22}} =$ $(about\ 75,\ 0{,}8)$	$Z_{C_{11}} =$ $(about\ 50,\ 0{,}8)$
İşçi məmnuniyyəti	$Z_{C_{31}} =$ $(about\ 25,\ 0{,}8)$	$Z_{C_{32}} =$ $(about\ 100,\ 0{,}8)$	$Z_{C_{33}} =$ $(about\ 75,\ 0{,}8)$

Cədvəl 4 və 5-də verilmiş Z-məlumatları nəzərə alaraq, çox meyarlı planlaşdırma qərarı üçün çox meyarlı Z-LP modeli aşağıdakı kimi formalaşdırılır:

$$Z_{f_1}(Z_x) = \big[(about\ 50,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_1} + (about\ 100,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_2} +$$
$$+(about\ 17{,}5,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_3}) \to \max$$

$$Z_{f_2}(Z_x) = \big[(about\ 92,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_1} + (about\ 75,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_2} +$$
$$+about\ 50,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_3}) \to \max$$

$$Z_{f_3}(Z_x) = \big[(about\ 25,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_1} + (about\ 100,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_2} +$$
$$+(about\ 75,\quad 0{,}8 \cdot Z_{x_3}) \to \max$$

$$(about\ 12,\quad 0.9) \cdot Z_{x_1} + (about\ 17,\quad 0.9) \cdot Z_{x_2} \le (about\ 1400,\quad 0.9)$$

$$(about\ 2,\quad 0.9) \cdot Z_{x_1} + (about\ 9,\quad 0.9) \cdot Z_{x_2} +$$
$$+(about\ 8{,}0.9) \cdot Z_{x_3} \le (about\ 1000,\quad 0.9)$$

$$(about\ 10,\quad 0.9) \cdot Z_{x_1} + (about\ 13,\quad 0.9) \cdot Z_{x_2} +$$
$$+(about\ 15,\quad 0.9) \cdot Z_{x_3} \le (about\ 1750,\quad 0.9)$$

$$(about\ 6,\quad 0.9) \cdot Z_{x_1} + (about\ 16,\quad 0.9) \cdot Z_{x_3} \le about\ 1325,\quad 0.9)$$

$$(about\ 12,\quad 0.9) \cdot Z_{x_2} + (about\ 7,\quad 0.9) \cdot Z_{x_3} \le about\ 900,\quad 0.9)$$

$(about\ 9.5, \quad 0.9) \cdot Z_{x_1} + (about\ 9.5, \quad 0.9) \cdot Z_{x_2} +$
$(about\ 4, \quad 0.9) \cdot Z_{x_3} \leq about\ 1075, \quad 0.9)$

$Z_{x_1}, Z_{x_2}, Z_{x_3} \geq 0.$

6.5. Z-Diferensial tənliklər əsasında beyin-onurğaarası mayenin (cerebrospinal fluid CSF) axınının modelləşdirilməsi.

[35]-də Z-qiymətli diferensial tənliklərin beyin-onurğaarası mayenin (cerebrospinal fluid CSF) axınının modelləşdirilməsinə tətbiq edilməsini nəzərdən keçirirlər. Lakin, Z-ədədlər əvəzinə Z^{+}-ədədlər istifadə olunur. Biz tamamilə Z- ədədlərlə təsvir edilən diferensial tənliklərin həllini veririk.

CSF beyni və onurğa beynini əhatə edir. CSF axını beynin qorunması üçün yastıq rolunu oynayır, habelə tullantıların beyindən atılması üçün çox vacibdir. Hydrocephalus, CSF axınındakı anormallıqların ventrikulyar dilatasiya və beyin sıxılması ilə nəticələndiyi bir beyin xəstəliyidir [36, 37]. Başqa sözlə, CSF-nin həddindən artıq yığılması, beyin toxumalarına potensial zərərli təzyiq yaradan ventriküllərin anormal genişlənməsinə səbəb olur. Belə bir pozulmanın riyazi modeli aşağıdakı kimidir:

$$z'(t) = (-\frac{k}{r}) \cdot (z(t))^2 + (k \cdot I_f(t)) \cdot z(t) + \frac{k \cdot p_d}{r} \cdot z(t),$$
$$z(t_0) = z_0, \qquad (32)$$

burada $z(t)$ mm H2O ilə CSF təzyiqi, $k > 0$ serebral elastiklik, $r > 0$ CSF-nin udma müqaviməti, I_f CSF-nin yaranma sürəti və p_d isə adətən $z(t_0)$-a bərabər olan venoz sistemin təzyiqidir.

Fərz edək ki, $z(t_0) = (z_A, z_B) = ((110,115,120), (0.5,0.65,1))$. Ümumiliyi azaltmadan k, r, $I_f(t)$ kəmiyyətlərinin dəqiq qiymətlərini $k = \frac{1}{0.6}$, $r = 700$, $I_f(t) = 0.1$ qəbul edə bilərik.

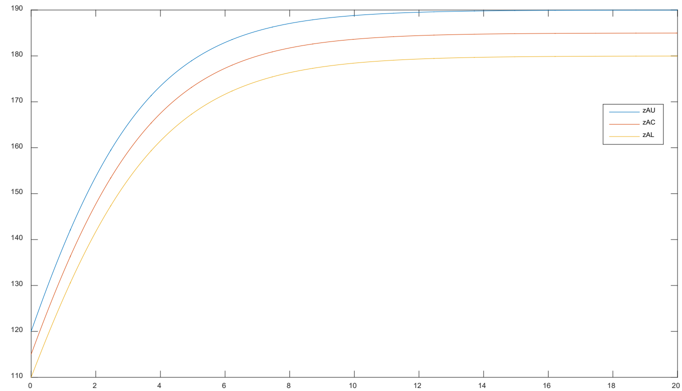
---

[35] M. Mazandarani and Y. Zhao, "Z-Differential Equations," in *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. doi: 10.1109/TFUZZ.2019.2908131

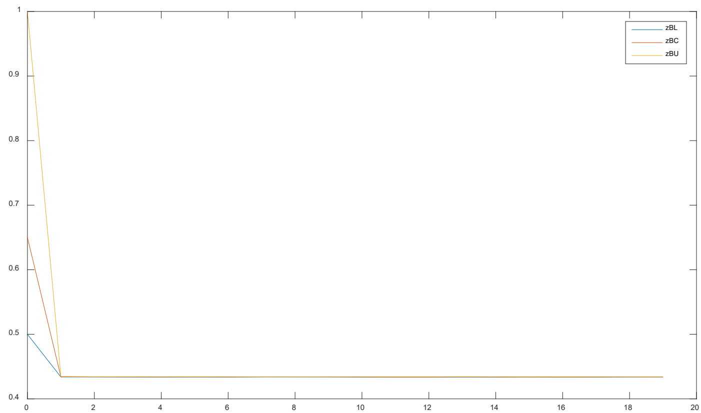
[36] Kauffman Justin, Drapaca Corina S. A fractional pressurevolume model of cerebrospinal uid dynamics in hydrocephalus. Mech Biol Syst Mater, vol. 4, 179-84, 2014.

[37] Marmarou A, Shulman K, Rosende RM, A nonlinear analysis of the cerebrospinal uid system and intracranial pressure dynamics. J Neurosurg, vol. 48, 332-344, 1978.

(32)-in həlli Şəkil 4-9-da göstərilmişdir. Müqayisə üçün iki halı nəzərdən keçiririk (Şəkil 6 - 9): hal 1 - oxşarlıq və asılılıq nəzərə alınmadığı halda, 2 - oxşarlıq və asılılıq nəzərə alındıqda[38].

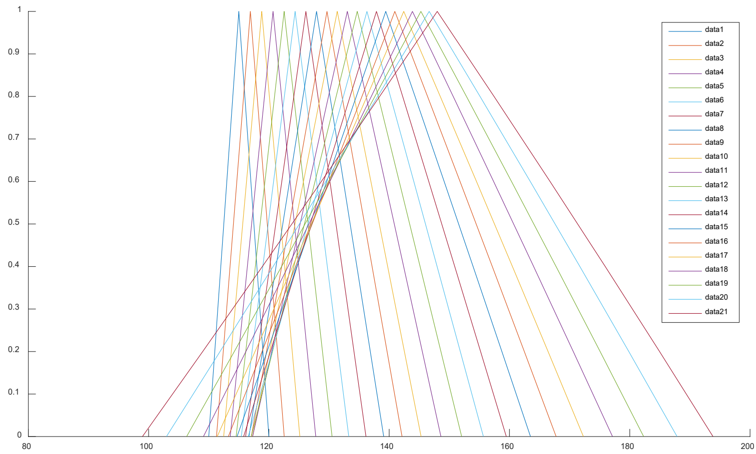


Şəkil 4. (32) tənliyinin həllinin $Z_A(t)$ komponenti.

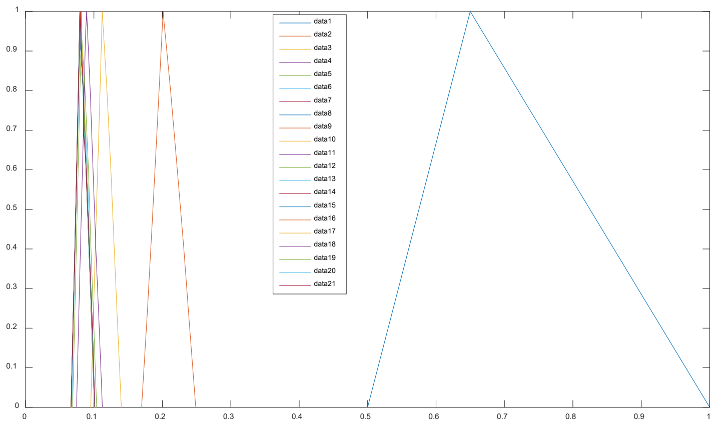


Şəkil 5. (32) tənliyinin həllinin $Z_B(t)$ komponenti.

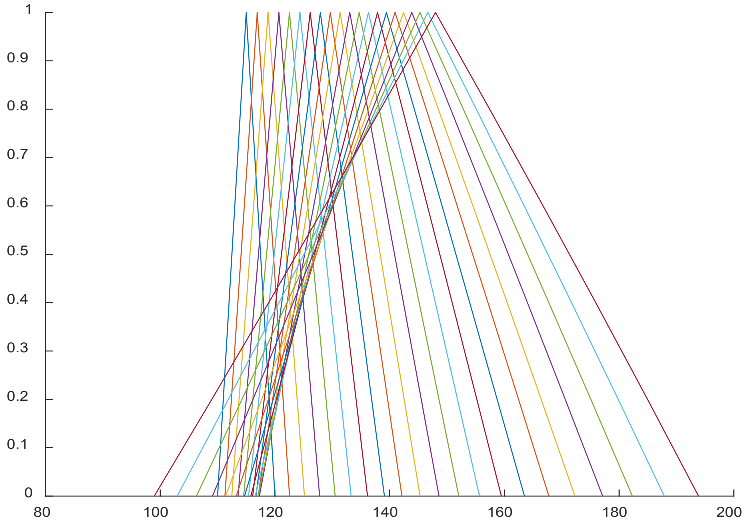
[38] Rafik A. Aliev Z-Differential Equations, Advances in Intelligent Systems and Computing Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-35249-3_8, 2019, 69-77, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-35249-3_8#citeas



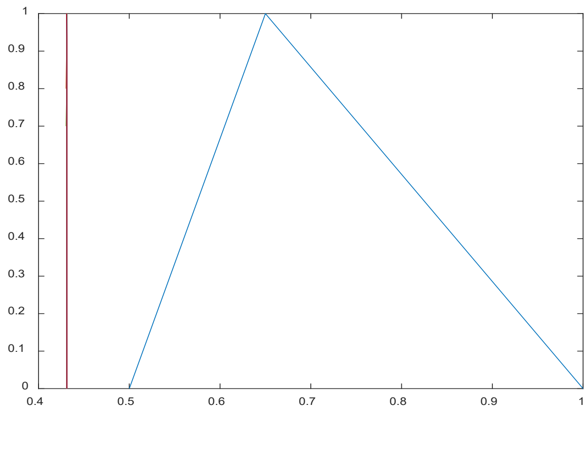
Şəkil 6. (32) tənliyinin həllinin $Z_A(t)$ komponenti, hal 1.

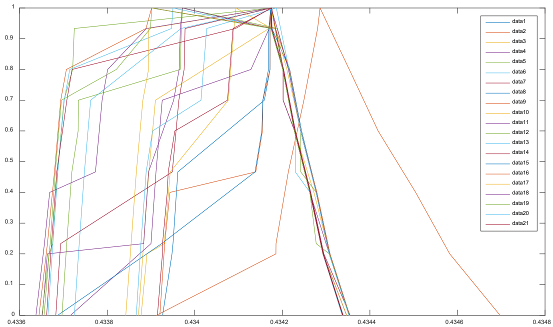


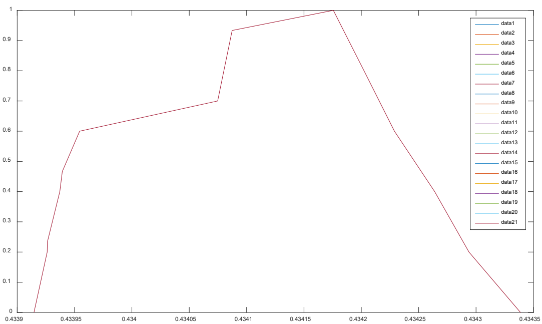
Şəkil 7. (32) tənliyinin həllinin $Z_B(t)$ komponenti, hal 1.



Şəkil 8. (32) tənliyinin həllinin $Z_A(t)$ komponenti, hal 2.







Şəkil 9. (32) tənliyinin həllinin $Z_B(t)$ komponenti, hal 2.

Göründüyü kimi, 2-ci halda $Z_B(t)$ qeyri-səlis etibarlılıq proses zamanı daha yaxşı qorunur (0.4-dən yuxarı qalır, Şəkil 9), 1-ci halda 0.1-dən aşağı olur, əksinə (şəkil 7). Əgər (μ,ν)-kəsiklərin hədd qiymətindən istifadə etsək, daha yaxşı nəticə əldə edə bilərik. Beləliklə, təklif olunan yanaşma, iki növ qeyri-müəyyənliyin birləşməsinin təkmilləşdirilmiş işlənməsi ilə Z-ədədlərlə qiymətləndirilən dəyişənlərdən asılı diferensial tənliklərin modelləşdirilməsi üçün ilkin addımdır.

Z-ədədlər üzərində hesablamalara HMF əsaslı yanaşmadan Z-ədədlə ifadə olunan başlanğıc şərt məsələsinin formalaşdırılması və onun həlli üçün əsas kimi istifadə edirik. İlk dəfə olaraq Z-ədəd dəyişənli DT-lər qeyri-səlis və Z+ əsaslı analoqlara gətirilmədən həll edilir. Eyni zamanda, asılı təsadüfi dəyişənlər haqqında məlumatları təsvir edən Z-ədədlər ilə hesablama üçün alqoritm təklif edirik. Bu, real dinamik proseslərin daha adekvat modelləşdirilməsinə imkan yaradır, çünki prosesin gələcək vəziyyətlər əvvəlki vəziyyətindən təbii olaraq asılıdır. Z-qiymətli başlanğıc şərt məsələsi formalaşdırılmış və ədədi həllinin hesablanması üçün Eyler üsuluna analoji olan yeni və səmərəli bir yanaşma təklif olunmuşdur.

Bu yanaşmanın üstünlüyünü göstərmək üçün tibb sahəsindəki dinamik prosesi təsvir edən Z-ədəd qiymətli dəyişənlərlə təsvir edilən DT-in həlli nümunəsi göstərilmişdir. Əldə edilmiş nəticələr göstərir ki, təklif olunan yanaşma, məlumatın qeyri-səlis etibarlılığının, bimodal məlumatların əsas göstəricilərindən biri kimi daha yaxşı işlənməsinə imkan verir.

ƏSAS ELMİ NƏTİCƏLƏR

Dissertasiya işində əldə edilmiş əsas **elmi nəticələr** aşağıdakı kimidir:

1. Qərar qəbuletmədə informasiyanın etibarlılığını nəzərə alınması üçün Z-ədədlər üzərində hesabi və cəbri əməllərin yerinə yetirilməsi məsələsinə baxılıb;
2. Kəsilməz Z-ədədlər üzərində əməllər;
3. Diskret Z-ədədlər üzərində əməllər;
4. Z-xətti proqramlaşdırma məsələsinin həlli ilk dəfə təklif olunub;
5. Faydalılıq funksiyasının çatışmazlığını aradan qaldıran Z-informasiya mühitində qərar qəbuletmə üsulu verilib;
6. Z-informasiya mühitində alternativlərin ranqlaşdırılması üçün Pareto optimallıq prinsipinə əsaslanan üsul təklif olunmuşdur;
7. Dissertasiya işində təklif olunan nəzəri müddəalar Matlab proqramlar paketinə uyğun olaraq yaradılmış Zlab proqramlar paketində geniş tətbiq edilmişdir. O cümlədən, Z-ədədlər üzərində əməllər, Z-xətti proqramlaşdırma, Pareto optimallıq və s. Zlab paketinə daxil edilmiş və dünyanın müxtəlif ölkələrində geniş istifadə olunur.
8. Təklif olunmuş elmi müddəalar təchizat məsələsi üçün qərar qəbuletmə, çoxmeyarlı marketinq məsələsi üçün qərar qəbuletmə, şirkətin istehsalının Z-xətti proqramlaşdırma əsasında optimal

planlaşdırılması məsələlərinin həllinə tətbiq olunmuş və alınan nəticələr onların səmərəliliyini təsdiq etmişdir.

Dissertasiyanın əsas məzmunu aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. A.F. Musayev, A.V. Alizadeh, B.G. Guirimov, O.H. Huseynov. Computational Framework for the Method of Decision Making with Imprecise Probabilities, Fifth International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control, Famagusta, North Cyprus 2-4, September, 2009, 287-290, https://ieeexplore.ieee.org/document/5379428
2. R.A.Aliev, A.V.Alizadeh, B.G.Guirimov, O.H. Huseynov Precisiated information-based approach to decision making with imperfect information, ICAFS-2010, Ninth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Prague, Czech Republic, August 26-27, 2010, 91-104.
3. A.F.Musayev, E.H.Musayeva, A.V. Alizadeh, Decision making with imprecise probabilities in macroeconomics, ICAFS-2010, Ninth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Prague, Czech Republic, August 26-27, 2010, 377-386.
4. R.A.Aliev, A.V.Alizadeh, B.G.Guirimov Unprecisiated information-based approach to decision making with imperfect information, ICAFS-2010, Ninth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Prague, Czech Republic, August 26-27, 2010, 387-397.
5. R.A.Aliev, A.V. Alizadeh, B.G. Guirimov, O.H. Huseynov. Decision making on L.A. Zadeh's benchmark problem, WCIS-2010, Sixth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation, Tashkent, Uzbekistan, November 25-27, 2010, 269-278.
6. A.V. Alizadeh, Akif F. Musayev, Rashad R. Aliev. Application of the fuzzy optimality concept to decision making with imprecise probabilities, ICSCCW-2011, Sixth International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control, Antalya, Turkey, September 1-2, 2011, 373-382.
7. A.V. Alizadeh, Rashad R. Aliev, Rafig R. Aliyev. Operational approach to z-information-based decision making, ICAFS-2012, Tenth

International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Lisbon, Portugal, August 29-30, 2012, 269-277.
8. Rafik A. Aliev, Witold Pedrycz, Bijan Fazlollahi, A.V. Alizadeh, Oleg H. Huseynov, Babek GuirimovFuzzy logic-based generalized decision theory with imperfect information. Information Sciences, April, 2012, Volume 189, 15, 18–42, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025511006128?via%3Dihub
9. Akif V. Alizadeh, Rashad R. Aliev, Oleg H. Huseynov. Numerical computations with discrete z-numbers, ICSCCW-2013, Seventh International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control, Izmir, Turkey, September 2-3, 2013, 71-82
10. Rafik A. Aliev, Witold Pedrycz, A.V. Alizadeh, Oleg H. Huseynov. Fuzzy optimality based decision making under imperfect information without utility, Journal Fuzzy Optimization and Decision Making, Kluwer Academic Publishers Hingham, MA, USA, In: FO & DM, https://doi.org/10.1007/s10700-013-9160-2, 2013, Volume 12 Issue 4, December 2013,357-372, https://link.springer.com/article/10.1007/s10700-013-9160-2
11. A.V. Alizadeh, Oleg H. Huseynov Minimum and maximum of discrete z-numbers, Eleventh International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS – 2014, Paris, France, September 2-3, 2014, 205-218.
12. Rafik A. Aliev, A.V. Alizadeh, Oleg H. Huseynov. The arithmetic of discrete Z-numbers. Information Sciences https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.08.024, January 2015, Volume 290, 1, 134-155, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025514008135?via%3Dihub
13. R. A. Aliev, A.V. Alizadeh, O. H. Huseynov, K. I. Jabbarova Z-Number-Based Linear Programming. International Journal of Intelligent Systems, May 2015, Volume 30, Issue 5, 563–589, https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/int.21709
14. A.V. Alizadeh, Rana Serdaroglu Application of z-restriction-based multi-criteria choice to a marketing mix problem, 12th International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS 2016, Vienna, Austria, Science Direct, Procedia Computer Science 102:239-243, https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.09.396, 29-

30 August, 2016, 102, 239 – 243, https://cyberleninka.org/article/n/1468935
15. A.V. Alizadeh, Multi-objective decision making in marketing mix product problem under z-information, Ninth World Conference "Intelligent Systems for Industrial Automation", WCIS-2016, Tashkent, Uzbekistan, ISBN: 933609-36-4, 25-27 October, 2016, 49-52,
16. R.A. Aliev, A.V. Alizadeh, O.H. Huseynov An introduction to the arithmetic of Z-numbers by using horizontal membership functions, 9th International Conference on Theory and Application of Soft Computing, Computing with Words and Perception, ICSCCW 2017, Budapest, Hungary, Procedia Computer Science, https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.11.24922-23 August, 2017, Volume 120, 349-356, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050917324614?via%3Dihub
17. A.V. Alizadeh, Ahmed A. Valiev, Tarlan S. Abdullayev, Nigar E. Adilova Comparison of measures of specificity of Z-numbers, 9th International Conference on Theory and Application of Soft Computing, Computing with Words and Perception, ICSCCW 2017, Budapest, Hungary, Procedia Computer Science, https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.11.265, 22-23 August, 2017, Volume 120, 466-472, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050917324778?via%3Dihub
18. Rafik A.Aliev, A.V. Alizadeh, Algebraic Properties of Z -Numbers Under Multiplicative Arithmetic Operations. Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04164-9_9, 2018, vol 896, 33-41, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-04164-9_9#citeas
19. A.V. Alizadeh, Rashad R. Aliyev, Oleg H. Huseynov. Algebraic Properties of Z -Numbers under Additive Arithmetic Operations, Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 896. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04164-9_118, 2018, vol 896893-900, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-04164-9_118#citeas
20. A.V. Alizadeh, Nigar E. Adilova. Laws of additive arithmetic operations over Z -numbers, Tenth World Conference on Intelligent

Systems for Industrial Automation, WCIS-2018, Tashkent, 2018, 207-210.
21. Rafik A. Aliev Z-Differential Equations, Advances in Intelligent Systems and Computing Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-35249-3_8, 2019, 69-77, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-35249-3_8#citeas
22. A.V. Alizadeh, Application of the Fuzzy Optimality Concept to Decision Making, Advances in Intelligent Systems and Computing Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-35249-3_69, 2019, 542-54, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-35249-3_69
23. A.V. Alizadeh, Properties of Set-Theoretical Operations over Z-Sets, Advances in Intelligent Systems and Computing Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-35249-3_84, 2019, vol 1095, 654-661, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-35249-3_84
24. A.V. Alizadeh, Properties of Join and Meet Operations over Z-numbers, 14th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing – ICAFS-2020, Montenegro, Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham. Online ISBN978-3-030-64058-3, Print ISBN978-3-030-64057-6, eBook Packages Intelligent Technologies and RoboticsIntelligent Technologies and Robotics (R0), 2020, vol 1306, 580-589, https://www.springer.com/gp/book/9783030640576, https://doi.org/10.1007/978-3-030-64058-3_72
25. Konul Jabbarova, A.V. Alizadeh, Z-Decision Making in Human Resources Department. 14th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing – ICAFS-2020, Montenegro, Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham. Online ISBN978-3-030-64058-3, Print ISBN978-3-030-64057-6, 2020, vol 1306, 498-507, https://www.springer.com/gp/book/9783030640576, https://doi.org/10.1007/978-3-030-64058-3_62
26. A.V. Alizadeh, Toward Ordering of n-Tuples of Z-Numbers, 11th World Conference "Intelligent System for Industrial Automation" (WCIS-2020), Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-68004-6_10, 2021, vol 1323, 72-80, DOI https://doi.org/10.1007/978-3-030-68004-6_10.

27. A.V. Alizadeh, Rafig R.Aliyev. Decision making with Z-bounded interval preference,15th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing – ICAFS-2022, Montenegro, Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham. Online ISBN, 2022.
28. A.V. Alizadeh, Rafig R.Aliyev. Multi-attribute Decision making under Z-set valued uncertainty, 15th International Conference on Theory and Application of Fuzzy Systems and Soft Computing – ICAFS-2022, Montenegro, Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham. Online ISBN, Print ISBN, 2022.
29. A.V. Alizadeh, R. R. Aliyev, Decision making with Z-cross entropy preference. 16th International Conference on Applications of Fuzzy Systems, Soft Computing and Artificial Intelligence Tools ICAFS – 2023, Antalya- Turkey. 2023
30. A.V. Alizadeh, R. R. Aliyev, Inference based on Z-probability trees, 16th International Conference on Applications of Fuzzy Systems, Soft Computing and Artificial Intelligence Tools ICAFS – 2023, Antalya-Turkey, 2023.
31. A.V. Alizadeh, R. R. Aliyev, Rank reversal free approach to decision making under Z-information. Tenth World Conference "Intelligent Systems for Industrial Automation", WCIS-2023, Tashkent, Uzbekistan, 2023, https://link.springer.com/book/9783031515200
32. Rafik A. Aliev, Rashad R. Aliyev, Oleg H. Huseynov, A.V. Alizadeh, The Arithmetic of Z-Numbers, Theory and Applications, Word Scientific Publishing, 2015 İSBN 978981-4675-28-4, 2015, 316, https://www.worldcat.org/title/arithmetic-of-z-numbers-theory-and-applications/oclc/907652071

Müştərək çap olunmuş işlərdə müəllifin şəxsi rolu:

[1]- İdeya müəllifi, hesablamaların aparılması və nəticələrin təhlili;
[2]- Məsələnin qoyuluşu, həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[3]- Məsələnin qoyuluşu, həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[4]- Məsələnin həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[5]- Məsələnin həll üsulu və nəticələrin təhlili;

[6]- Məsələnin qoyuluşu, həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[7]-İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu və kompüter simulyasiyası;
[8]-Məsələnin qoyuluşu və kompüter simulyasiyası;
[9]-İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu kompüter simulyasiyası.
[10]- Həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[11]- İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu, kompüter simulyasiyası.
[12]- Məsələnin həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[13]- Məsələnin qoyuluşu, həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[14]-İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu və kompüter simulyasiyası;
[16]-Məsələnin qoyuluşu, həll üsulu və kompüter simulyasiyası;
[17]-İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu və həll üsulu.
[18]- Həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[19]- İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu və kompüter simulyasiyası.
[20]- İdeya müəllifi, məsələnin həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[21]- Məsələnin qoyuluşu, həll üsulu və nəticələrin təhlili;
[25]-Həll üsulu və kompüter simulyasiyası;
[27]- İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu, həll üsulu və kompüter simulyasiyası;
[28]-İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu və həll üsulu.
[29]-İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu və həll üsulu.
[30]-İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu və həll üsulu.
[31]-İdeya müəllifi, məsələnin qoyuluşu və həll üsulu.
[32]-Məsələnin həll üsulu, kompüter simulyasiyası.

Dissertasiyanın müdafiəsi 15 aprel 2025-cü il tarixində saat 14:00-da Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən BED 2.48 Birdəfəlik dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1010, Bakı şəhəri, Azadlıq prospekti 20

e-mail: info@asoiu.edu.az

Dissertasiya ilə ADNSU PHŞ-nin kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları ADNSU PHŞ-nin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 12.03.2025-cü il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 12.02.2025

Kağızın formatı: A5

Həcm: 80 000

Tiraj:100 nüsxə